Mathematik 1

(Modul FM-6001)

Prof. Dr.-Ing. Jan Mugele   jan.mugele@hwr-berlin.de

„Es gibt keinen Königsweg zur Mathematik.“
Euklid
(griech. Mathematiker ca. 300 v.u.Z.)

„Zu lernen ist viel anstrengender als zu verstehen.“
Rudolf Taschner
(österr. Mathematiker)

Vorlesungsgestaltung

Lerneinheit …
Thema x,y,z

VL Unterlagen **Übungen** **Ressourcen**

Schlagworte zum Thema

MERKE: Beschreibung der Dinge die Sie wissen müssen.

siehe: Lehrbuch für TGA ← **weiterführende Quellen**

Übungen

Weitere Aufgaben finden sich oft in den Büchern und im Moodlekurs

Vorlesungsplan

1. Semester: Mathematik 1

- Zahlenmengen
- Tanz der Funktionen
- Veränderung kalkulieren (Differenzialrechnung)

2. Semester: Mathematik 2

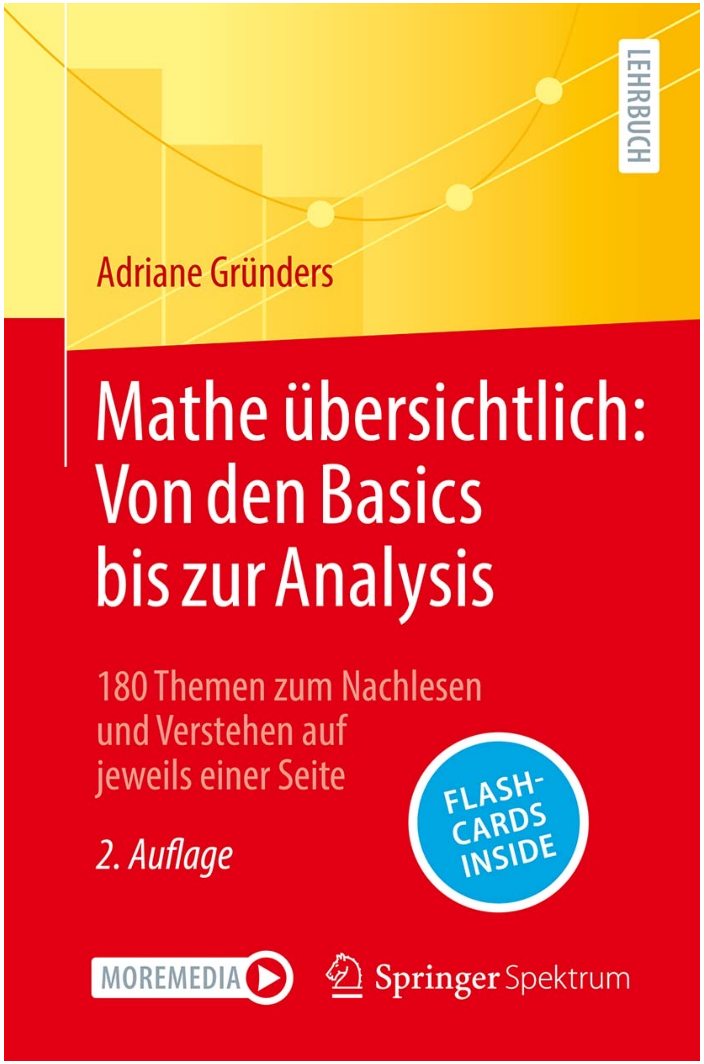
- Sammeln und bilanzieren (Integralrechnung)
- Funktionen und ihre Ableitungen (Differenzialgleichungen)
- Rechnen mit komplexen Zahlen
- Vektorrechnung
- Beobachtungen berechnen (Fehlerrechnung)
- Rechnen mit Logik

Ressourcen auf Moodle

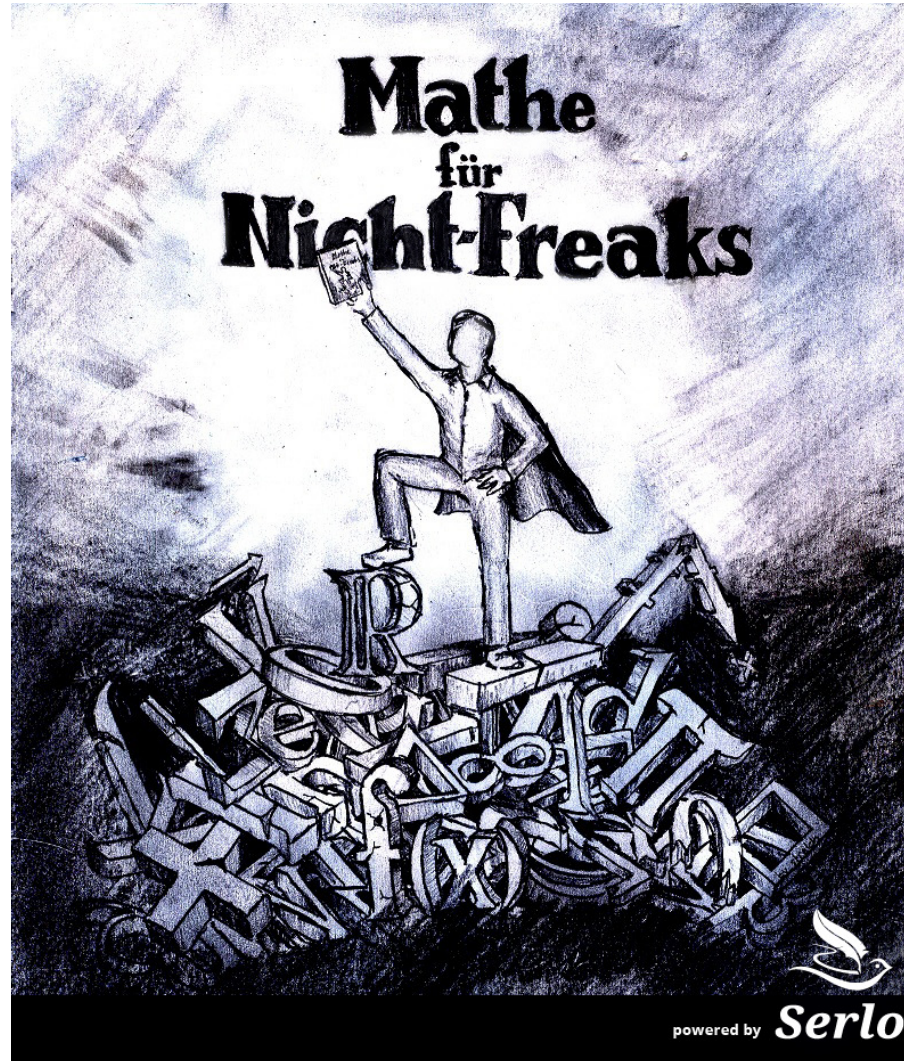
Lothar Papula SpringerVieweg

Mathematik für Ing. und NaWi Band 1 (PA1)
Mathematik für Ing. und NaWi Aufgaben (PAA)
Mathematik für Ing. und NaWi Beispiele (PAB)

Ressourcen



A. Gründers „Mathe übersichtlich“

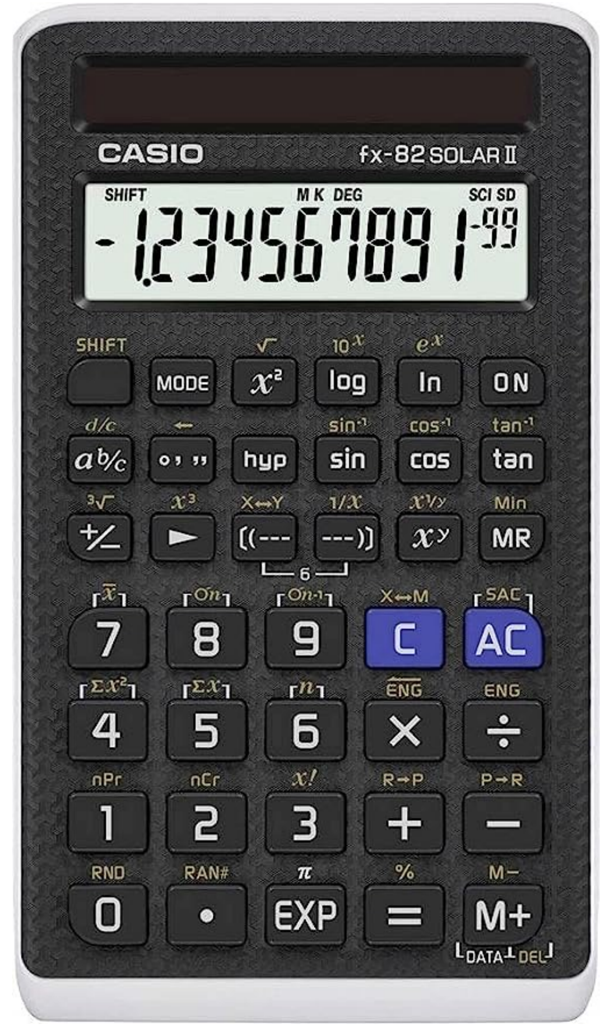


https://de.wikibooks.org/wiki/Mathe_für_Nicht-Freaks

Wikibook „Mathe für Nicht-Freaks“

zugelassene Taschenrechner am Fachbereich 2

Texas Instruments: TI-30 ECO RS

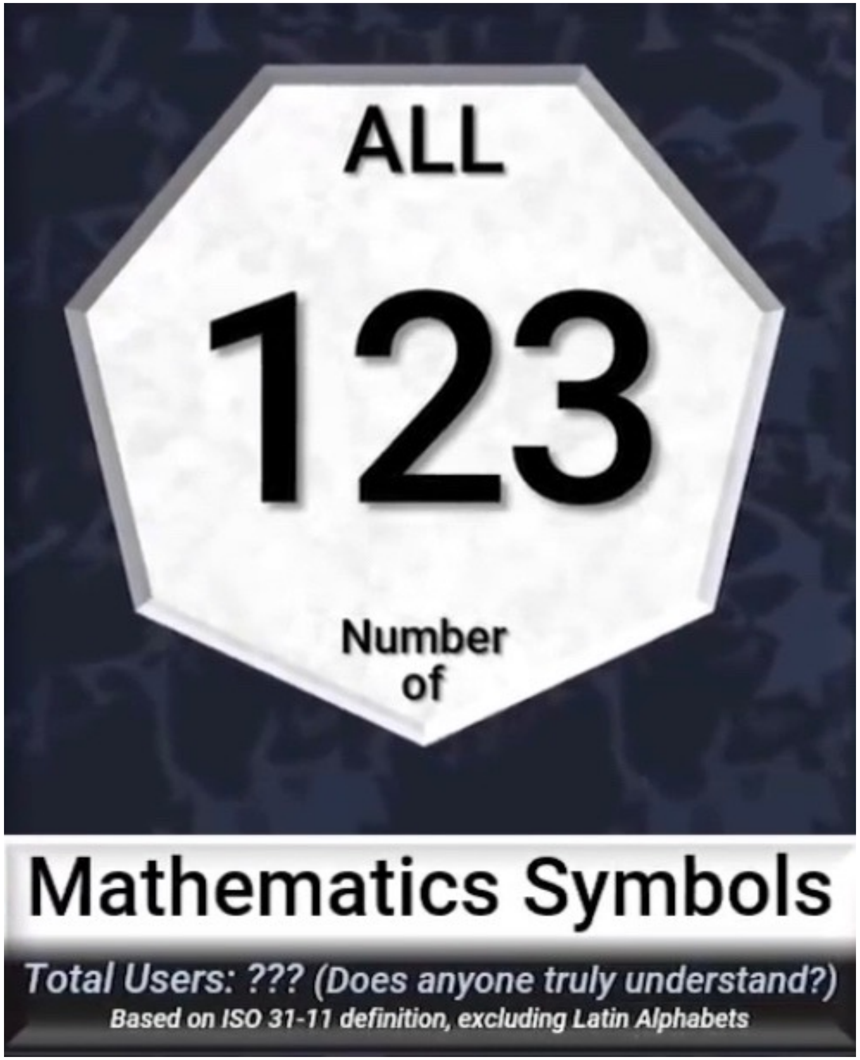


CASIO: fx-82 SOLAR II

Lerneinheit 0
wichtige Grundlagen!

griechisches Alphabet, lateinisches Alphabet, Symbole, Gleichungen, Konventionen

mathematische Symbole



Video Beyond Infinity Number Comparison
https://youtu.be/RJS3Z2DYEO4

griechisches Alphabet

Α	α	Ν	ν
Β	β	Ξ	ξ
Γ	γ	Ο	ο
Δ	δ	Π	π
Ε	ε	Ρ	ϱ
Ζ	ζ	Σ	σ
Η	η	Τ	τ
Θ	θ	Υ	υ
Ι	ι	Φ	φ
Κ	κ	Χ	χ
Λ	λ	Ψ	ψ
Μ	μ	Ω	ω

siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Griechisches_Alphabet

griechisches Alphabet

Α	α	Alpha	Ν	ν	Ny
Β	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	Ο	ο	Omikron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
Ε	ε	Epsilon	Ρ	ϱ	Roh
Ζ	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
Η	η	Eta	Τ	τ	Tau
Θ	θ	Theta	ϒ	υ	Ypsilon
Ι	ι	Iota	Φ	φ	Phi
Κ	κ	Kappa	Χ	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
Μ	μ	My	Ω	ω	Omega

lateinisches Alphabet

a , b , c

d

e

f , g , h

i , j

k , l , m , n

o

p, q , r, s, t

$\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{w}}$

$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$

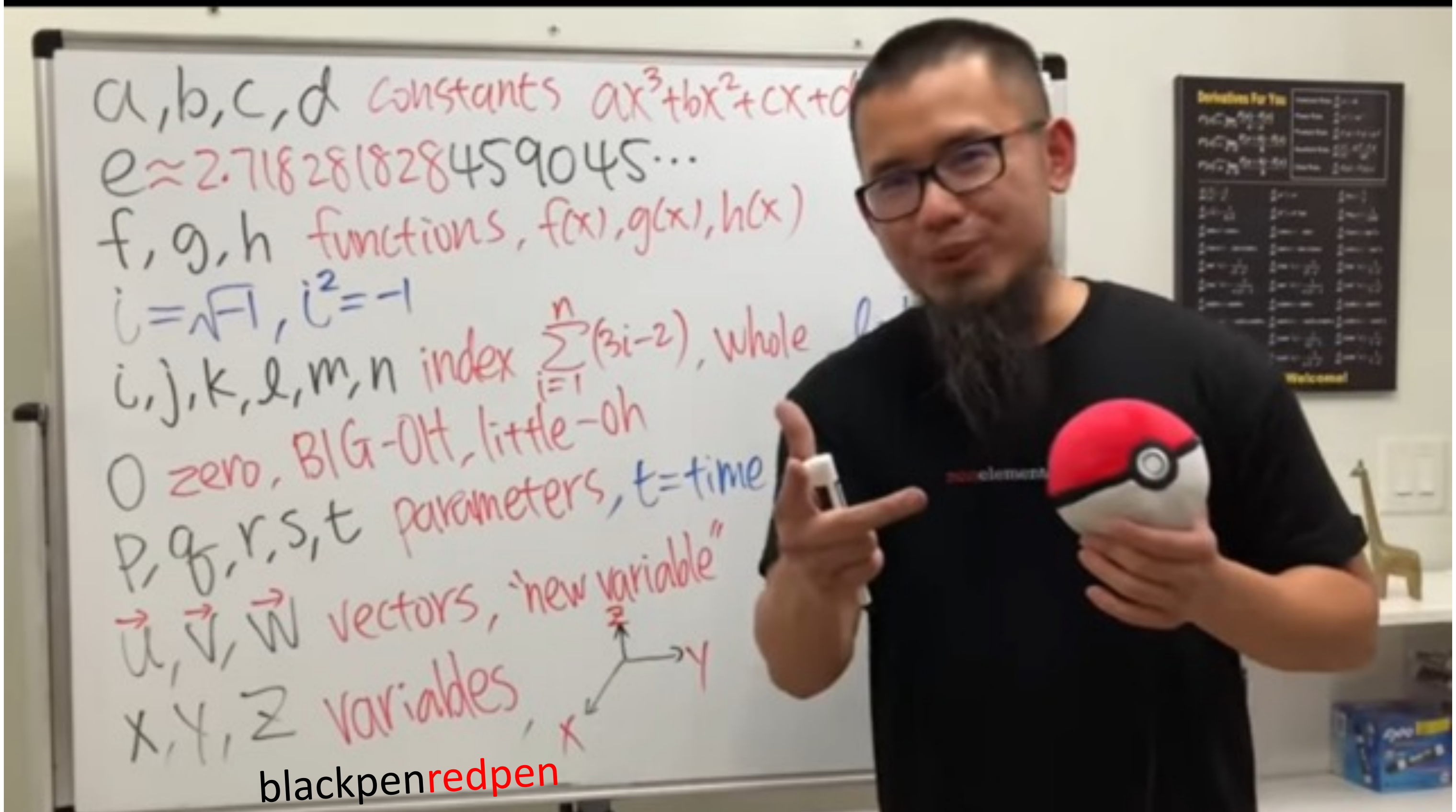
A , B , C …

lateinisches Alphabet

a , b , c	Konstanten / Koeffizienten z. B. $\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x^1 + \mathrm{c}x^0$
d	Differential
e	Eulerzahl e ≈ 2,71828182845 ...
f , g , h	Funktionen z. B. $\mathrm{f(x)},\ \mathrm{g(x)},\ \mathrm{h(x)}$
i , j	imaginäre Einheit $\mathrm{j} = \sqrt{-1}\quad \mathrm{j}^2 = -1$
k , l , m , n	Indizes α_n $\sum_\mathrm{k}\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}$ $\prod_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{a_k}$ sind diskrete Größen
o	Koordinatenursprung
p, q , r, s, t	Parameter z. B. steht t für Zeit
$\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{w}}$	Vektoren oder Funktionen $\mathrm{u(x)},\ \mathrm{v(x)},\ \mathrm{w(x)}$
$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$	Variablen
A , B , C ...	Mengen

lateinisches Alphabet

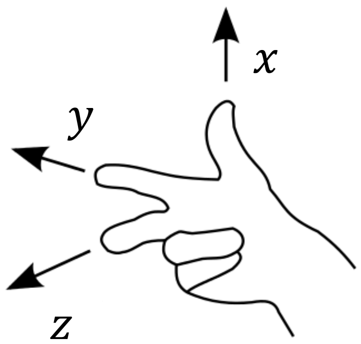
YT-Kanal: blackpenredpen



https://youtu.be/HxWHcukNv6o

Vorzeichenkonventionen

Koordinatensystem (Rechte-Hand-Regel)



positiver Drehwinkel

von x nach y und
von y nach z

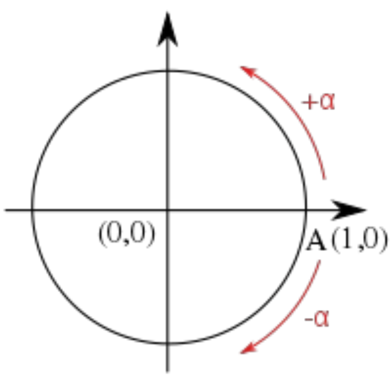
Änderung einer Größe

$$\Delta \mathrm{x} = \mathrm{x}_{\mathrm{Ende}} - \mathrm{x}_{\mathrm{Start}}$$

entgegengesetzte Eigenschaften

P^+	e^-
Proton	Elektron

gerichteter Winkel



Plus-Minus-Zeichen

$$\cos(x \pm y) = \cos(y) \cdot \cos(x) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$$

fasst Folgendes zusammen

$$\cos(x + y) = \cos(y) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot \sin(y)$$
$$\cos(x - y) = \cos(y) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot \sin(y)$$

siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Vorzeichen_(Zahl)

logische Symbole in der Mathematik

Symbol	Bedeutung	Beispiel
$\in$	Element einer Menge	0 ist Element der reellen Zahlen: $0 \in \mathbb{R}$
$\forall\, x$	Für alle x ist $\mathrm{A}(x)$ wahr.	Alle natürlichen Zahlen sind größer als -1: $\forall\, x \in \mathbb{N} > -1$
$\exists\, x$	Es existiert (mindestens) ein x, für das $\mathrm{A}(x)$ wahr ist.	Es existiert (mindestens) ein Element, das Element der natürlichen Zahlen ist: $\exists x \in \mathbb{N}$
$\exists!\ x$	Es existiert genau ein x, für das $\mathrm{A}(x)$ wahr ist.	Es existiert genau ein neutrales Element, bezüglich der Addition: $\exists!\ x \in \mathbb{N} \wedge \mathrm{y} = \mathrm{y} + x$
$\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$	UND	x und y sind Elemente der natürlichen Zahlen: $x \wedge \mathrm{y} \in \mathbb{N}$
$\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$	ODER	x oder y ist Element der Menge M: $x \wedge \mathrm{y} \in \mathrm{M}$
$\mathrm{A}\ \dot{\vee}\ \mathrm{B}$	Exklusiv ODER	entweder x oder y aber nicht beides
$\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{B}$	genau dann wenn	für $\mathrm{y} = 1/x$ existiert genau eine Polstelle, genau dann wenn x Element der reellen Zahlen ist: für $\mathrm{y} = 1/x\ \exists!\, x_{\mathrm{Pol}} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

wichtige Rechengesetze für zweistellige Operationen

Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz): Vertauscht man in einer zweistelligen Operation die Operanden, ändert sich das Ergebnis nicht.

Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz): Eine zweistellige Operation mit mehr als zwei Operanden, kann in beliebiger Reihenfolge durchgeführt.

Distributivgesetz (Verteilungsgesetz): Man kann eine zweistelligen Operation auf die Operatoren einer geklammerten zweiten Operation anwenden, indem man die Operation mit jedem in der Klammer stehenden Operanden einzeln anwendet und dann die in der Klammer stehende zweite Operation durchführt.

Wenn diese Gesetze gelten, wird das Rechnen einfach!
(meist gelten sie in den kommenden zwei Semestern 😀)

wichtige Hilfen zum Üben

WICHTIG: Mathe ist nur schwierig, wenn man es nicht kann. Um hier erfolgreich sein zu können, hilft am Ende nur kontinuierliches Üben Üben Üben Üben Üben …

Moodlekurs: Machen Sie möglichst alle Aufgaben im Mathemoodlekurs (Sie sind schon eingeschrieben): https://moodle.hwr-berlin.de/course/view.php?id=76646

Duolingo: Kann mit der Weile auch sehr gut Mathe: https://de.duolingo.com

Wolfram Alfa: Ist ein KI gestütztes Computer Algebra System (CAS), mit dem man (fast) alles nachrechen kann: https://www.wolframalpha.com

GeoGebra: Ist ein Computer Algebra System, mit dem man insbesondere mathematische Probleme visualisieren kann: https://www.geogebra.org

Lerneinheit 1
Zahlenmengen

Lerneinheit 1.1
Mengenlehre

Menge, die leere Menge, Element, elementfremd, Gleichheit, Mächtigkeit, Teilmenge, Obermenge

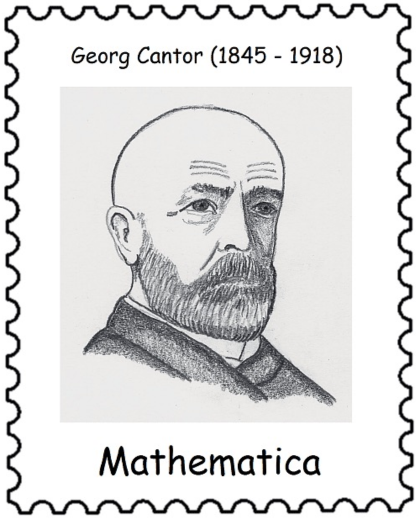
Leitfrage

Was sind Mengen und wie kann man mit ihnen rechnen?

Kurzbiografie auf spektrum.de

René Descartes (1596–1650)
Algebra vs. Geometrie

Kurzbiografie auf spektrum.de



Georg Cantor (1845 – 1918)
Begründer der Mengenlehre

Mengenlehre

Mengen

MERKE: Eine Menge M ist eine Gesamtheit wohlunterschiedener Objekte, wobei von jedem dieser Objekte feststeht, ob es zur Menge M gehört oder nicht.

Darstellung

$\mathrm{M} = \{\, x \mid x \text{ mit den Eigenschaften } \ldots \}$

$\mathrm{M} = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3\}$

$\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2$ und x_3 sind Elemente von M

$\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \wedge \mathrm{x}_3 \in \mathrm{M}$

MERKE: Die Objekte x einer Menge heißen Elemente der Menge M. Dies wird durch das Symbol ∈ gekenn-zeichnet wird. Mengen werden mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet (z. B. M). Ein Element kann in einer Menge nur einmal vorkommen.
In dieser Mathevorlesung wird, zur Abgrenzung der Elemente das Komma verwendet. In anderen Quellen werden auch das Semikolon oder ein senkrechter Strich verwendet.

Beispiel

$\mathrm{M} = \{x \mid x \text{ ist Element der reellen Zahlen und Lösung von } x^2 = 4\} \Leftrightarrow$

$\mathrm{M} = \{x \mid (x \in \mathbb{R}) \wedge (x^2 = 4)\} \Leftrightarrow \quad \mathrm{M} = \{-2, 2\}$ $\qquad -2 \text{ und } 2 \in \mathrm{M} \text{ alle anderen } \mathbb{R} \notin \mathrm{M}$

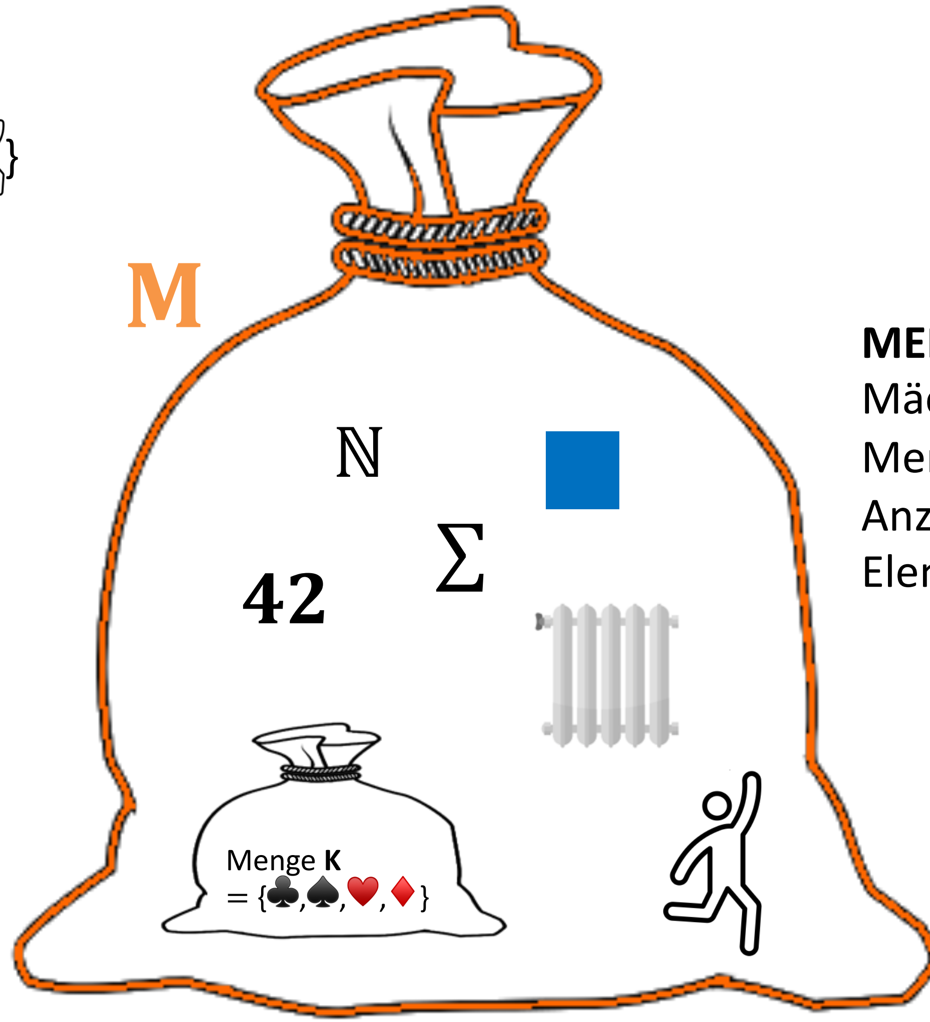
Mengenlehre

Mengen

$= \{ \mathbb{N}, \sum, 42,$ , , K, $\}$

MERKE: Mengen können Elemente einer Menge sein!

Jedes Element einer Menge kann nur einmal enthalten sein!



MERKE: Die Mächtigkeit einer Menge ist die Anzahl ihrer Elemente.

MERKE: <u>Elemente</u> einer Menge können Dinge sein, die in <u>mindestens einer Eigenschaft wohlunterschieden</u> sind, z.B. Zahlen, Symbole, Heizkörper, Farben, Menschen, Mengen usw.

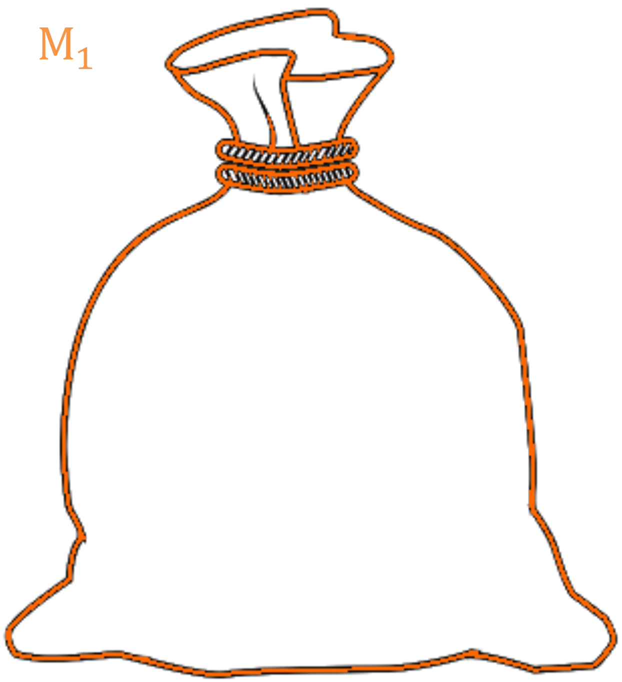
Mengenlehre

die leere Menge Symbol: $\emptyset$ oder $\{\ \ \}$

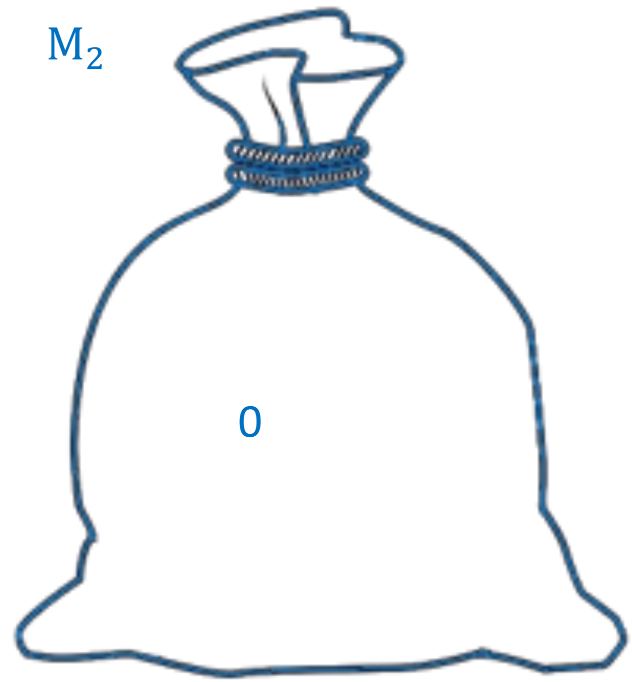
$M_1 = \{\ \ \} = \emptyset$

$M_2 \neq \emptyset$

M_1



M_2



MERKE: Eine Menge ist die <u>leere Menge Ø</u>, wenn sie <u>keine Elemente</u> enthält. Auch wenn nur die Null als Element in einer Menge enthalten ist, handelt es sich nicht um die leere Menge!

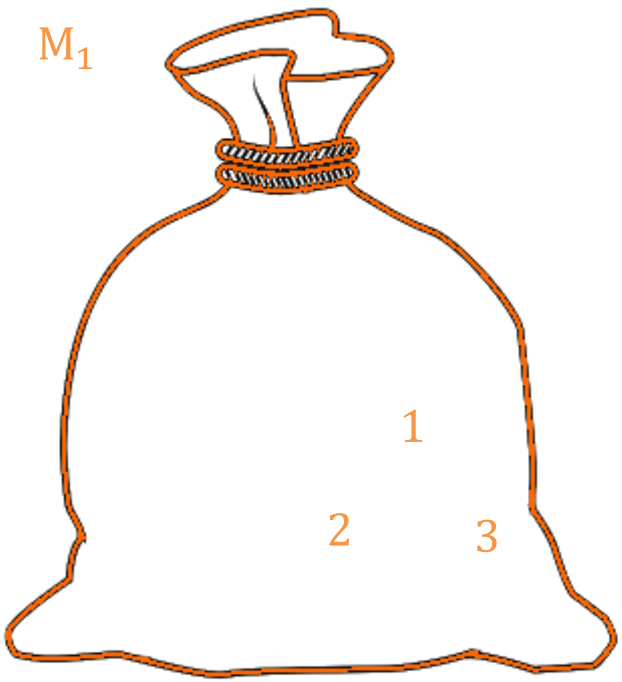
siehe: Arens et. al. „Mathematik“ S. 31 f.

Mengenlehre

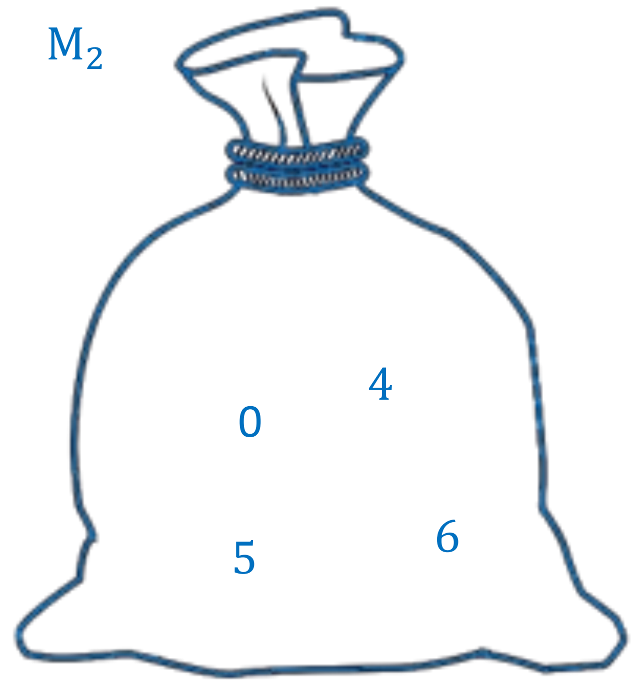
elementfremde (disjunkte) Mengen

$M_1 = \{1, 2, 3\}$ $\qquad$ $M_2 = \{0, 4, 5, 6\}$

M_1



M_2

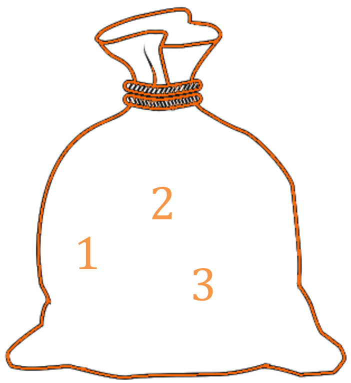


MERKE: Zwei Mengen M_1 und M_2 sind <u>elementfremd (disjunkt)</u>, genau dann, wenn sie kein gemeinsames Element haben.

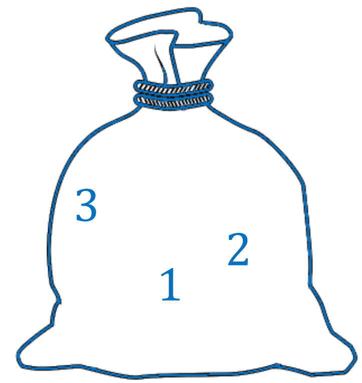
Mengenlehre

Gleichheit und Ungleichheit von Mengen

$\{1, 2, 3\} =$

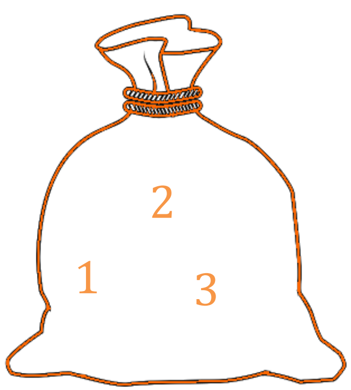


$= M_1 \quad = \quad M_2 =$

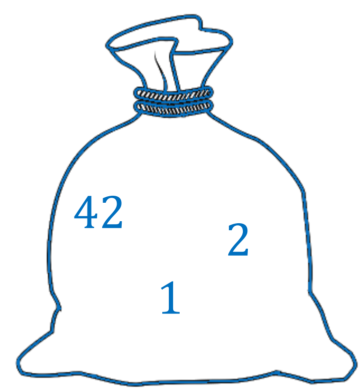


$= \{3, 1, 2\}$

$\{1, 2, 3\} =$



$= M_1 \quad \neq \quad M_2 =$



$= \{42, 1, 2\}$

MERKE: Zwei Mengen M_1 und M_2 sind gleich, genau dann, wenn jedes Element von M_1 in M_2 und jedes Element von M_2 in M_1 vorkommt. Ansonsten sind sie nicht gleich.

Mengenbeziehungen

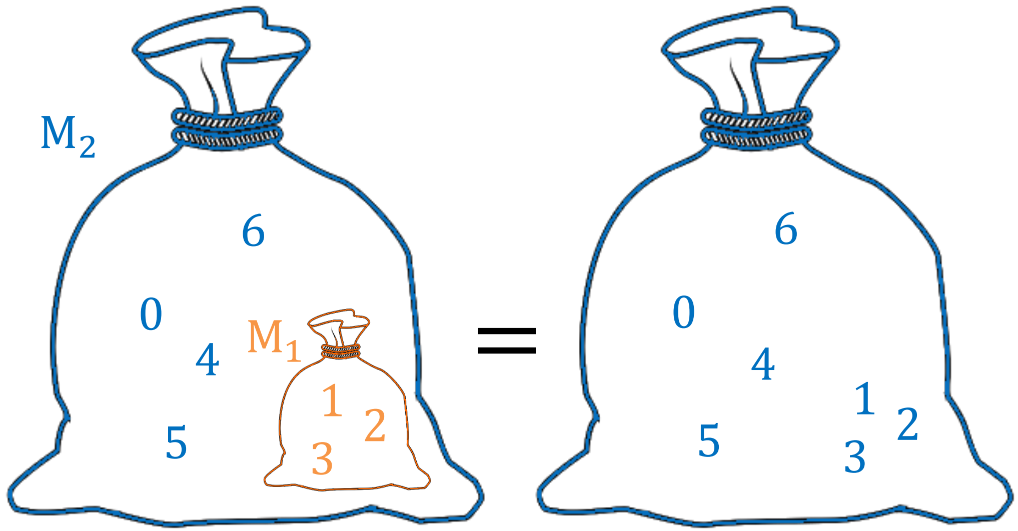
Teilmengen von Mengen

Teilmenge
$M_1 \subseteq M_2$

echte Teilmenge
$M_1 \subset M_2$

Obermenge
$M_2 \supseteq M_1$

echte Obermenge
$M_2 \supset M_1$



Beispiel Teilmengen

$M_1 = \{1, 2, 3\}$
$M_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$M_1 \cup M_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} = M_2$

MERKE: M_1 ist eine <u>Teilmenge</u> ($\subseteq$) von M_2, genau dann, wenn jedes Element von M_1 auch Element von M_2 ist. Dann ist M_2 auch eine Obermenge von M_1.

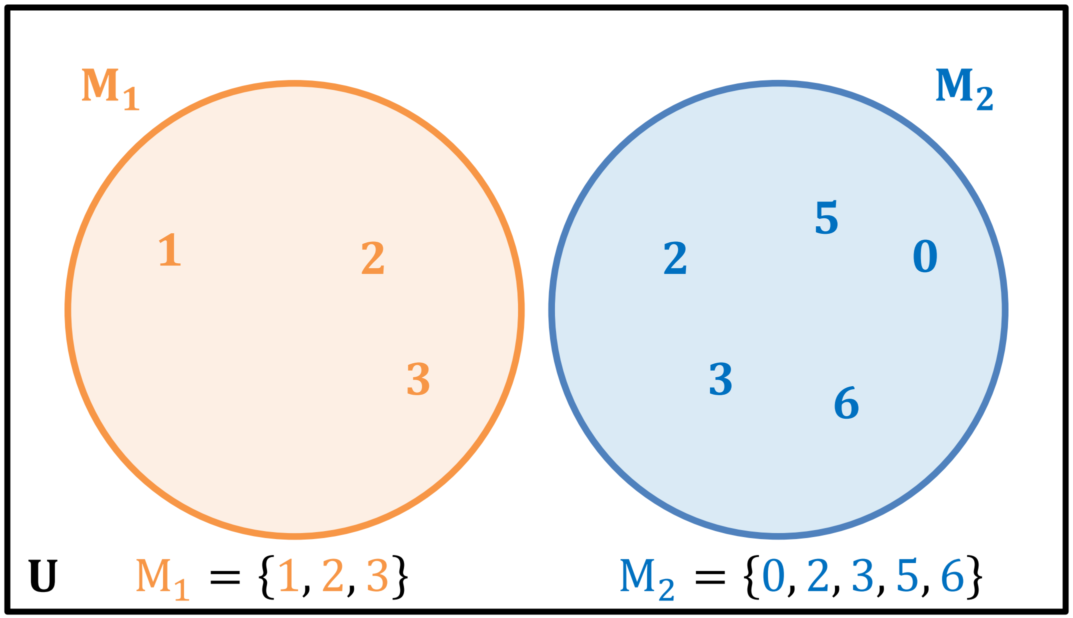
MERKE: M_1 ist eine <u>echte Teilmenge</u> ($\subset$) von M_2, wenn jedes Element von M_1 auch Element von M_2 ist und es mindestens ein Element von M_2 gibt, das nicht Element von M_1 ist. Dann ist M_2 auch eine echte Obermenge von M_1.

Lerneinheit 1.2
Mengenoperationen

Vereinigung, Durchschnitt, Differenz, symmetrische Differenz, Komplement, Tupel, Mengenprodukt

Mengenoperationen

Darstellung als Venn-Diagramm



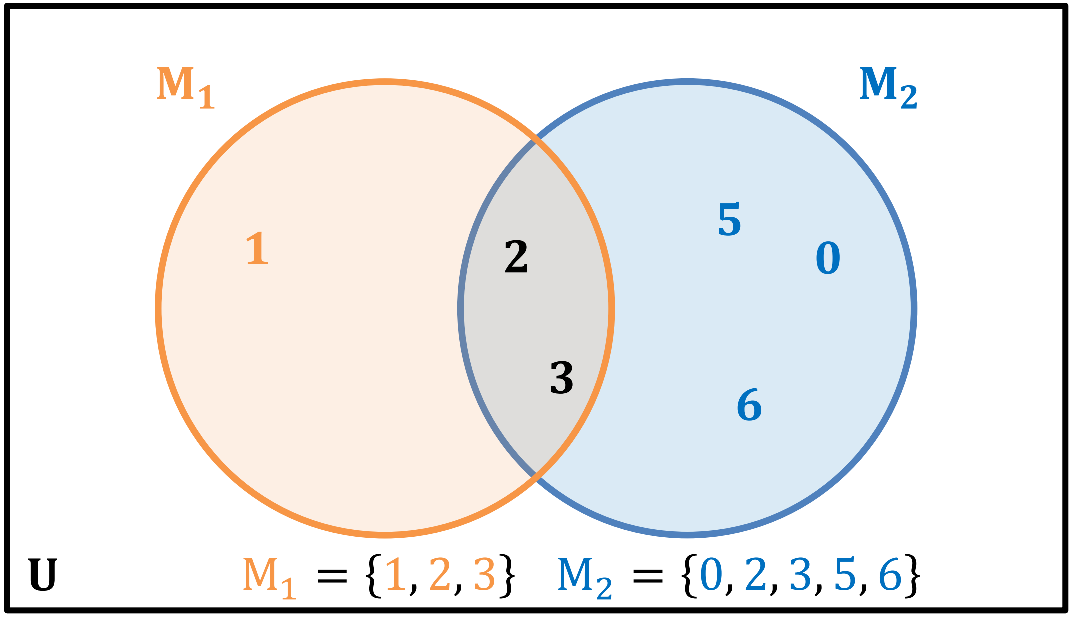
z.B. könnte $\mathrm{U} = \mathbb{N}$, also gleich den natürlichen Zahlen sein

MERKE: Ein Venn-Diagramm besteht aus einem Rechteck U, das für den Raum aller möglichen Mengen steht. Sowie aus Kreisen, die für die einzelnen Mengen stehen. Jedes Element, das innerhalb eines Kreises liegt, liegt dann in der Menge, die diesen Kreis darstellt.

siehe: Arens et. al. „Mathematik“

Mengenoperationen

Darstellung als Venn-Diagramm



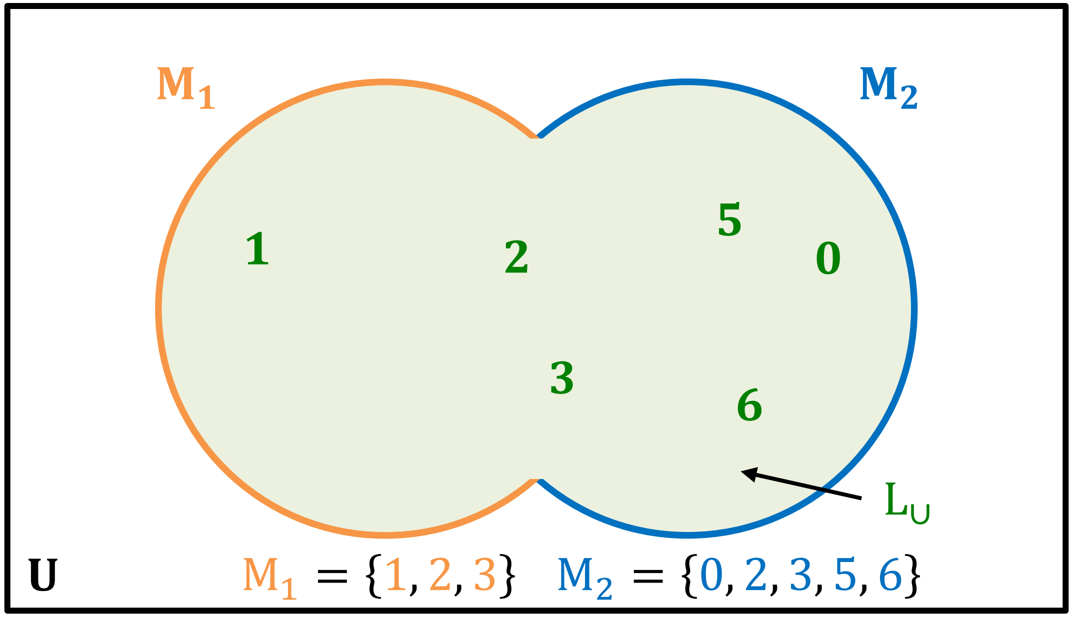
MERKE: Mengen können verschiedene oder auch gleiche Elemente beinhalten. Es ist möglich Rechenoperationen für zwei Mengen zu definieren, um neue Mengen zu erhalten. Z.B. die Menge aller Elemente, die in den beiden Mengen zusammen enthalten sind oder die Menge aller Elemente, die in den beiden Mengen vorkommen.

siehe: Arens et. al. „Mathematik“

Mengenoperationen

Vereinigung zweier Mengen

$$M_1 \cup M_2 = \{\, x \mid (x \in M_1) \vee (x \in M_2)\}$$



$$M_1 \cup M_2 = \{0, 1, 2, 3, 5, 6\} = \{0, 1, 2, 3, 5, 6\} = L_\cup$$

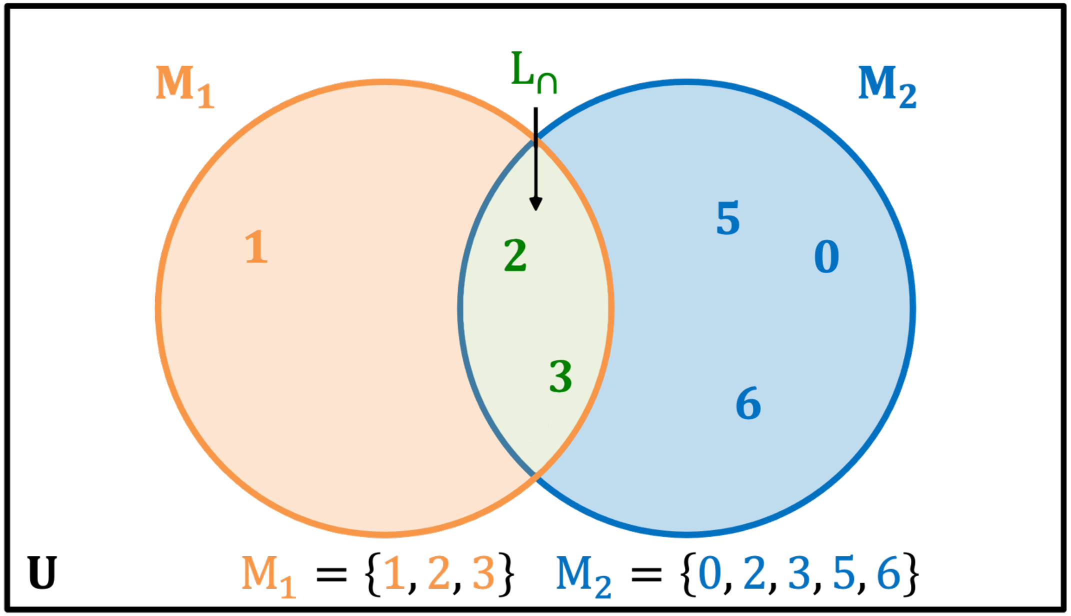
2 und 3 kommen in beiden Mengen vor, in der Lösungsmenge aber nur jeweils einmal.

MERKE: Die <u>Vereinigung</u> $M_1 \cup M_2$, sprich „M_1 vereinigt mit M_2“, enthält alle Elemente, die in M_1 <u>oder</u> M_2 enthalten sind. Es gelten das Kommutativ- und das Assoziativgesetz ☺. Daraus folgt, dass M_1 und M_2 jeweils Teilmengen von $L_\cup$ sind.

Mengenoperationen

Durchschnitt zweier Mengen

$$M_1 \cap M_2 = \{ x \mid (x \in M_1) \wedge (x \in M_2)\}$$



$$M_1 \cap M_2 = \{2, 3\} = L_\cap$$

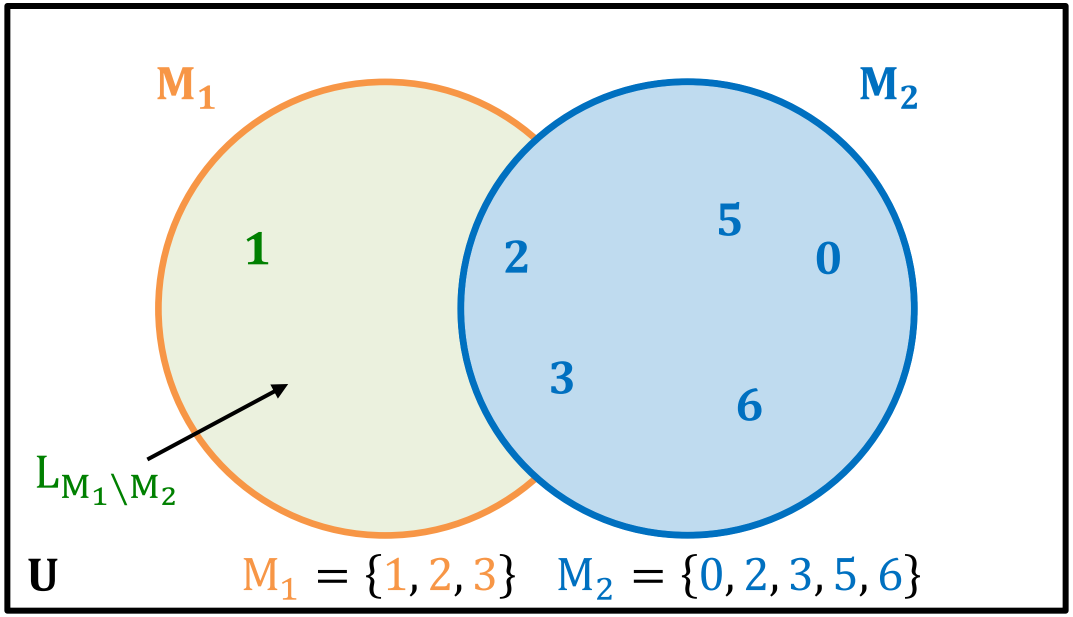
MERKE: Der <u>Durchschnitt</u> $M_1 \cap M_2$, sprich „M_1 geschnitten mit M_2“, enthält alle Elemente, die in M_1 <u>und</u> in M_2 enthalten sind. Es gelten das Kommutativ- und das Assoziativgesetz ☺. Wenn es keine solche Elemente existieren, dann ist $L_\cap$ die leere Menge.

siehe: Arens et. al. „Mathematik“

Mengenoperationen

Differenz zweier Mengen

$$M_1 \setminus M_2 = \{ x \mid (x \in M_1) \wedge (x \notin M_2)\}$$



$$M_1 \setminus M_2 = \{1\} = L_{M_1 \setminus M_2}$$

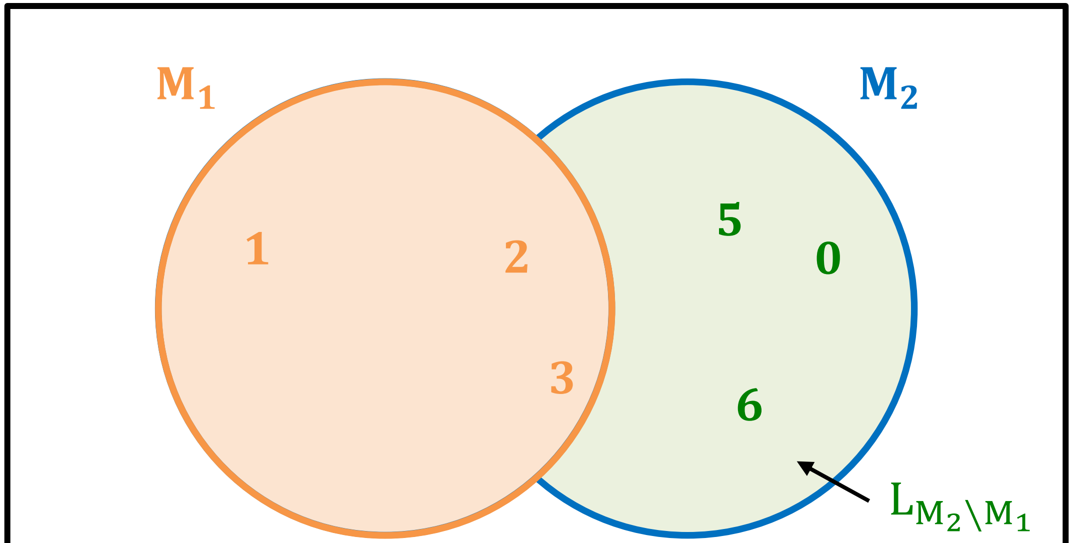
MERKE: Die <u>Differenz</u> $M_1 \setminus M_2$, sprich „M_1 ohne M_2“, enthält alle Elemente von M_1, die kein Element von M_2 sind. Es gelten weder das Kommutativ- noch das Assoziativgesetz ☹.

siehe: Arens et. al. „Mathematik“

Mengenoperationen

Differenz zweier Mengen

$$M_1 \setminus M_2 = \{ x \mid (x \in M_1) \wedge (x \notin M_2)\}$$



$M_1 = \{1, 2, 3\}$ $M_2 = \{0, 2, 3, 5, 6\}$

$$M_2 \setminus M_1 = \{0, 5, 6\} = L_{M_2 \setminus M_1}$$

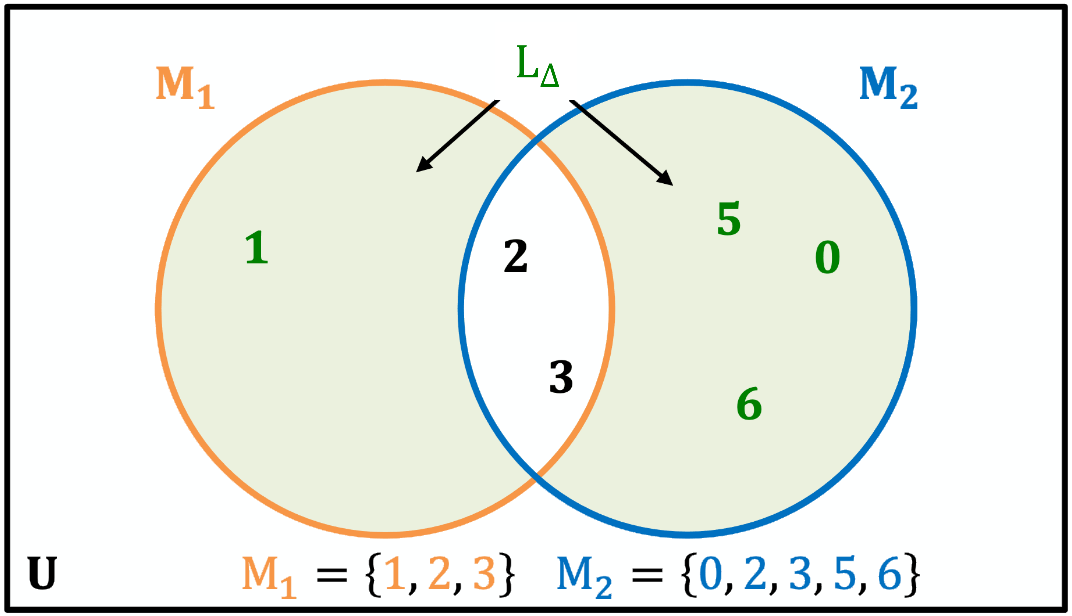
MERKE: Die <u>Differenz</u> $M_2 \setminus M_1$, sprich „M_2 ohne M_1“, enthält alle Elemente von M_2, die kein Element von M_1 sind. Es gelten weder das Kommutativ- noch das Assoziativgesetz 😐.

siehe: Arens et. al. „Mathematik“

Mengenoperationen

symmetrische Differenz zweier Mengen

$$M_1 \,\Delta\, M_2 = \{\, x \mid (x \in M_1) \,\dot{\vee}\, (x \in M_2)\}$$



$$M_1 \,\Delta\, M_2 = \{0, 1, 5, 5, 6\} = L_\Delta$$

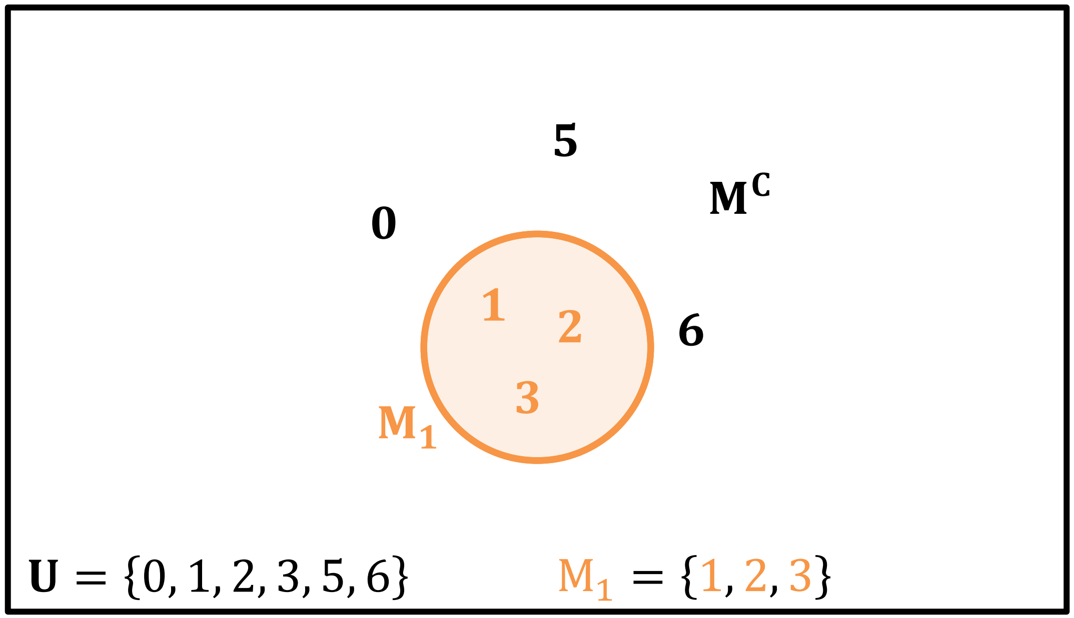
MERKE: Die <u>symmetrische Differenz</u> $M_1 \,\Delta\, M_2$, enthält alle Elemente, die <u>nicht</u> im Durchschnitt von M_1 <u>und</u> M_2 enthalten sind. Es gelten das Kommutativ- und das Assoziativgesetz ☺.

siehe: Arens et. al. „Mathematik“

Mengenoperationen

das Komplement

$$M^C = \{\, x \mid (x \in M_2) \wedge (x \notin M_1) \}$$



MERKE: Ist M_1 eine Teilmenge von U, d.h. sind alle Elemente von M_1 in U enthalten, dann bilden die nicht in M_1 enthaltenen Elemente das Komplement M^C.

Mengenoperationen (Rechengesetze)

Vertauschungsgesetze (Kommutativgesetze)

$M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$ $\qquad$ $M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$

Verbindungsgesetze (Assoziativgesetze)

$M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3$ $\qquad$ $M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cap M_2) \cap M_3$

Verteilungsgesetze (Distributivgesetze)

$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$ $\qquad$ $M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$

gleiches Ergebnis bei mehrfacher Ausführung (Idempotenzen):

$M_1 \cup M_1 = M_1$ $\qquad$ $M_1 \cap M_1 = M_1$

Absorptionsgesetze (Adjuktivitäten):

$M_1 \cup (M_1 \cap M_2) = M_1$ $\qquad$ $M_1 \cap (M_1 \cup M_2) = M_1$

de morgansche Gesetze:

$(M_1 \cup M_2)^C = {M_1}^C \cap {M_2}^C$ $\qquad$ $(M_1 \cap M_2)^C = {M_1}^C \cup {M_2}^C$

Komplementaritäten:

$M_1 \cup {M_1}^C = M_1$ $\qquad$ $M_1 \cap {M_1}^C = \emptyset$

Mengenoperationen

Tupel

2-Tupel mit den Komponenten x_1 und x_2: (x_1, x_2)

3-Tupel mit den Komponenten x_1, x_2 und x_3: (x_1, x_2, x_3)

…

n-Tupel mit n Komponenten $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

MERKE: Wenn die Reihenfolge wichtig ist, und Elemente mehrfach vorkommen sollen, reichen Mengen zur Beschreibung nicht aus. Deshalb werden Tupel als geordnete Objekte definiert (von *lat. quintuple* ‚fünffach'), deren Reihenfolge nicht geändert werden kann.

Beispiele

2-Tupel (geordnetes Paar)
mit den Komponenten x und y:

$(x, y) = (1, 5)$
$(x, y) \neq (y, x) \Rightarrow (1, 5) \neq (5, 1)$

3-Tupel (geordnetes Tripel)
mit den Komponenten x, y und z:

$(x, y, z) = (1, 5, 3)$
$(x, y, z) \neq (y, x, z) \neq (z, y, x)$ usw.

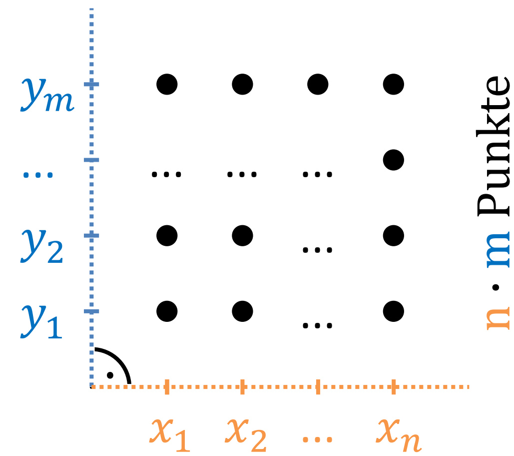
Mengenoperationen

Mengenprodukt (auch kartesisches Produkt oder Kreuzprodukt)

$M_1 \times M_2 = \{(x, y) \mid (x \in M_1) \wedge (y \in M_2)\}$ $\quad$ $M_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$ $M_2 = \{y_1, \dots, y_m\}$ $n, m \in \mathbb{N}^*$

$M_1 \times M_2$	y_1	y_2	$\dots$	y_m
x_1	(x_1, y_1)	(x_1, y_2)	$(x_1, \dots)$	(x_1, y_m)
x_2	(x_2, y_1)	(x_2, y_2)	$(x_2, \dots)$	(x_2, y_m)
$\dots$	$(\dots, y_1)$	$(\dots, y_2)$	$(\dots, \dots)$	$(\dots, y_m)$
x_n	(x_n, y_1)	(x_n, y_2)	$(x_n, \dots)$	(x_n, y_m)

$n \cdot m$ Paare



$M_1 \times M_2 = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), \dots, (x_2, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_m)\}$

MERKE: Das Mengenprodukt $M_1 \times M_2$ zweier Mengen M_1 und M_2, sprich „M_1 Kreuz M_2“, ist die Menge aller geordneten Paare mit $x \in M_1$ und $y \in M_2$. Für das Mengenprodukt gilt das Kommutativgesetz nicht, $M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1$. Die geordneten Paare können als Punkte auf einer Fläche interpretiert werden.

Mengenoperationen (Mengenprodukt)

Beispiel

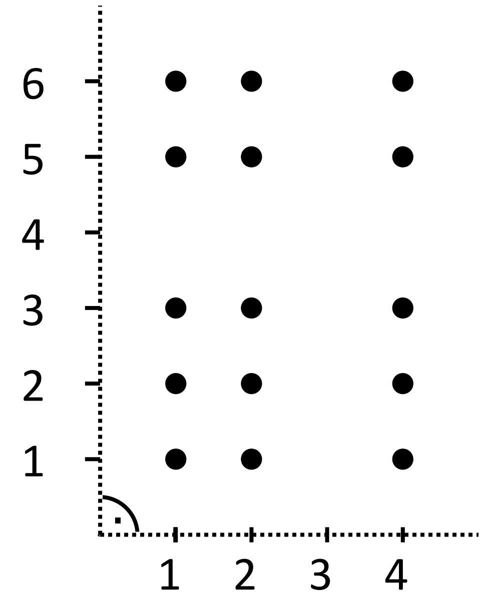
$M_1 = \{1, 2, 4\}$ $\qquad$ $M_2 = \{1, 2, 3, 5, 6\}$

$M_1 \times M_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,5), (1,6), \ldots, (4,6)\} = L$

$M_1 \times M_2$	1	2	3	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 5)	(2, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 5)	(4, 6)

$3 \cdot 5 = 15$ Paare

Darstellung als Punkte auf einer Fläche



$3 \cdot 5 = 15$ Punkte

Übungen Mengenoperationen

Übung Mengenprodukt I

Gegeben sind folgende zwei Mengen: $\mathbf{M_1} = \{4, 2, 5, 1, 3\}$ **und** $\mathbf{M_2} = \{1, 12, 5, 3, 42, 123\}$

a) Bilden Sie Vereinigungsmenge

b) Bilden Sie Schnittmenge

c) Bilden Sie die beiden Differenzmengen

Übung Mengenprodukt I

Gegeben sind folgende zwei Mengen: $\mathbf{M_1} = \{4, 2, 5, 1, 3\}$ und $\mathbf{M_2} = \{1, 12, 5, 3, 42, 123\}$

a) Bilden Sie Vereinigungsmenge.

$$M_1 \cup M_2 = \{\underbrace{1, \cancel{1}}, 2, \underbrace{3, \cancel{3}}, 4, \underbrace{5, \cancel{5}}, 12, 42, 123\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 12, 42, 123\} = L$$

Dubletten

b) Bilden Sie Schnittmenge.

$$M_1 \cap M_2 = \{1, 3, 5\} = L$$

c) Bilden Sie die beiden Differenzmengen.

$$M_1 \setminus M_2 = \{4, 2\} = L \qquad M_2 \setminus M_1 = \{12, 42, 123\} = L$$

Übung Mengenprodukt I

a) gilt: $\mathbf{M_1 \times M_2 = M_2 \times M_1}$?, wenn $\mathbf{M_1} = \{1, 2, 3\}$ und $\mathbf{M_2} = \{3, 2, 1\}$ ist?

b) Berechnen Sie $\mathbf{M_1 \times M_2}$. Geben sie die Anzahl der entstehenden Paare an.

$\mathbf{M_1} = \{♣, ♠, ♥, ♦\}$ $\mathbf{M_2} = \{A, K, D, B, 10, 9, 8, 7\}$

$\mathbf{M_1 \times M_2}$								

Übung Mengenprodukt I

a) gilt: $\mathbf{M_1 \times M_2 = M_2 \times M_1}$?, wenn $\mathbf{M_1 = \{1, 2, 3\}}$ und $\mathbf{M_2 = \{3, 2, 1\}}$ ist?

ja, denn $M_1 = M_2$

b) Berechnen Sie $\mathbf{M_1 \times M_2}$. Geben sie die Anzahl der entstehenden Paare an.

$\mathbf{M_1} = \{♣, ♠, ♥, ♦\}$ $\mathbf{M_2} = \{A, K, D, B, 10, 9, 8, 7\}$

$\mathbf{M_1 \times M_2}$	A	K	D	B	10	9	8	7
♣	(♣, A)	(♣, K)	(♣, D)	(♣, B)	(♣, 10)	(♣, 9)	(♣, 8)	(♣, 7)
♠	(♠, A)	(♠, K)	(♠, D)	(♠, B)	(♠, 10)	(♠, 9)	(♠, 8)	(♠, 7)
♥	(♥, A)	(♥, K)	(♥, D)	(♥, B)	(♥, 10)	(♥, 9)	(♥, 8)	(♥, 7)
♦	(♦, A)	(♦, K)	(♦, D)	(♦, B)	(♦, 10)	(♦, 9)	(♦, 8)	(♦, 7)

$8 \cdot 4 = 32$ Paare

Das Ergebnis ist das französische Skatblatt.

Übung Mengenprodukt II

Berechnen Sie $\mathbf{M_1 \times M_2}$ und $\mathbf{M_2 \times M_1}$, wenn $\mathbf{M_1 = \{1, 2, 4\}}$ und $\mathbf{M_2 = \{1, 2, 3, 5, 6\}}$ ist.
Geben sie die jeweilige Anzahl der entstehenden Paare an.
Ist das Mengenprodukt kommutativ?

$\mathbf{M_1 \times M_2}$					

$\mathbf{M_2 \times M_1}$			

Übung Mengenprodukt II

Berechnen Sie $\mathbf{M_1 \times M_2}$ und $\mathbf{M_2 \times M_1}$, wenn $\mathbf{M_1 = \{1, 2, 4\}}$ und $\mathbf{M_2 = \{1, 2, 3, 5, 6\}}$ ist.
Geben sie die jeweilige Anzahl der entstehenden Paare an.
Ist das Mengenprodukt kommutativ?

$$M_1 \times M_2 = \{(1,1), (1,2), (1,5), (1,6), \ldots, (4,6)\}$$

$\mathbf{M_1 \times M_2}$	1	2	3	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 5)	(2, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 5)	(4, 6)

$$3 \cdot 5 = 15 \text{ Paare}$$

$$M_2 \times M_1 = \{(1,1), (1,2), (1,4), \ldots, (6,4)\}$$

$\mathbf{M_2 \times M_1}$	1	2	4
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 4)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 4)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 4)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 4)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 4)

$$5 \cdot 3 = 15 \text{ Paare}$$

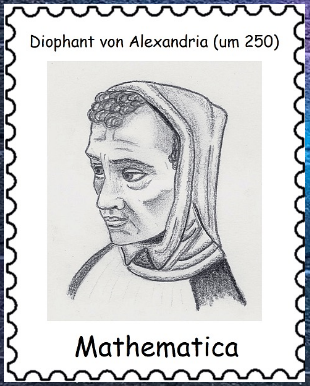
Man sieht, das Mengenprodukt ist in der Regel nicht kommutativ, $M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1$.

Lerneinheit 1.3
Zahlen bitte

das Zahlensystem und seine Anwendung

Zahlenvideo

Kurzbiografie auf spektrum.de



Diophant (um 250)
Begründer der Arithmetik

Was sind und was sollen die Zahlen?

Zahlen bitte

Symbole für Zahlen

MERKE: Eine Zahl ist durch ein bestimmtes Zeichen oder eine Kombination von Zahlzeichen (meist Ziffern) darstellbarer abstrakter Begriff, mit dessen Hilfe mathematische Operationen durchgeführt werden können. Zahlen können in verschiedenen Kontexten unterschiedliche Bedeutungen haben (z. B. als Zählzahlen und als Ordnungszahlen).

Beispiele für die Darstellung von Zählzahlen

Null, Eins, Zwei, Drei, Vier, Fünf, Sechs, Sieben, Acht, Neun, Zehn, Elf, Zwölf …

0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, … — dual

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, … — dezimal

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, … — hexadezimal

… ١٢, ١١, ١٠, ٩, ٨, ٧, ٦, ٥, ٤, ٣, ٢, ١, ٠ — arabisch

I, II, III, IV, V, VI, VIII, IX, X, XI, XII, … — römisch

Zahlen bitte

Symbole für Quantitäten

0	1	∞
steht für:	steht für:	steht für:
nicht vorhanden	**eine Einheit**	**ohne Grenze**
ist <u>eine Zahl</u>	ist <u>eine Zahl</u>	ist <u>keine Zahl</u>

MERKE: Die gesamte Zahlenmathematik, die wir in den nächsten beiden Semestern erkunden werden, dreht sich letztlich um die Beziehungen zwischen diesen drei Symbolen. Die Zwei und alle anderen natürlichen Zahlen entstehen z. B. durch die Addition von Einsen. Bruchzahlen durch Division von ganzen Zahlen usw.

Zahlen bitte

MERKE: Die Null ist eine Zahl, die das Nichtvorhandensein eines Wertes ausdrückt. Sie ist deshalb weder positiv noch negativ. Wenn die Null zu einer Zahl addiert wird, ändert diese sich nicht, wenn die Null mit einer Zahl multipliziert wird, wird der Ausdruck Null. Sie ist das neutrale Element der Addition und ist ihr eigenes inverses Element und ist somit weder positiv noch negativ.

MERKE: Eins ist eine Zahl. Sie ist die Grundeinheit für alle anderen reellen Zahlen und das neutrale Element der Multiplikation. Sie besitzt ein inverses Element, die negative Eins.

MERKE: Unendlich ist ein Konzept, aber keine Zahl. Es ist eine Eigenschaft, die komplementär zum Begriff endlich ist. Z. B. kann eine Addition von Eins unendlich oft wiederholt werden, zumindest theoretisch. Damit ist die Anzahl der natürlichen Zahlen unbegrenzt. John Wallis führte 1655 dafür das Zeichen ∞ ein.

Zahlen bitte

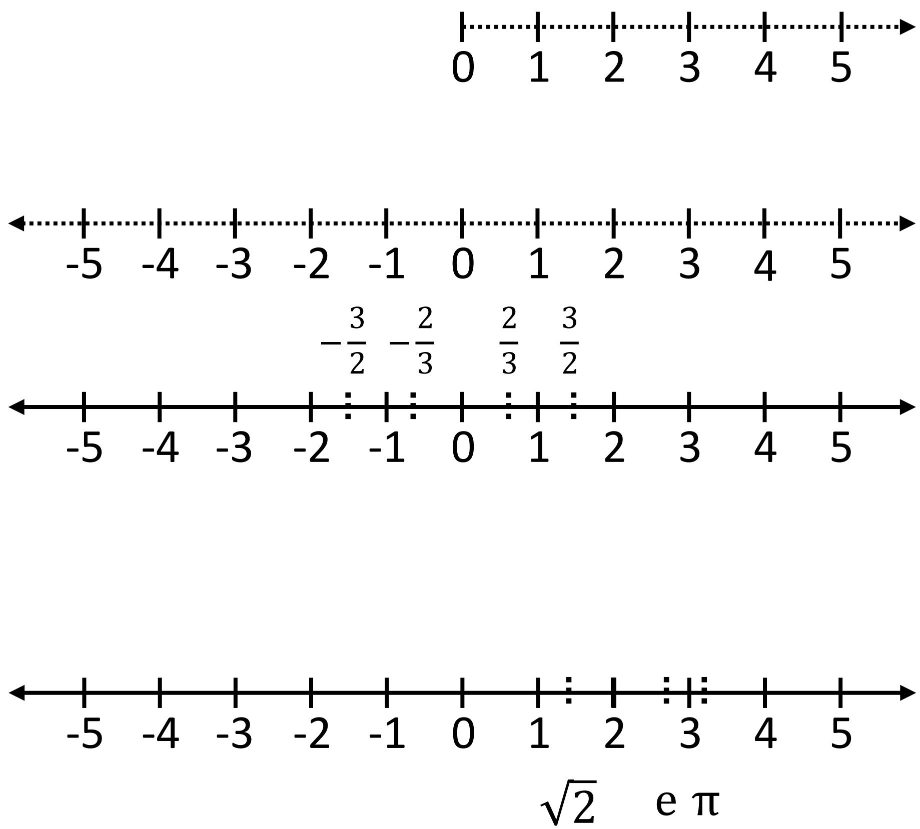
in den Naturwissenschaften gewöhnlich verwendete Zahlenmengen

natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

rationale Zahlen $\mathbb{Q}$

reelle Zahlen $\mathbb{R}$



„Praxiszahlen“ zum alltäglichen Rechnen

komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ $z = 2 + \sqrt{2}i$

„Theoriezahlen“ auch zu Rechnen, aber insbesondere auch um physikalische Gesetze zu beschreiben.

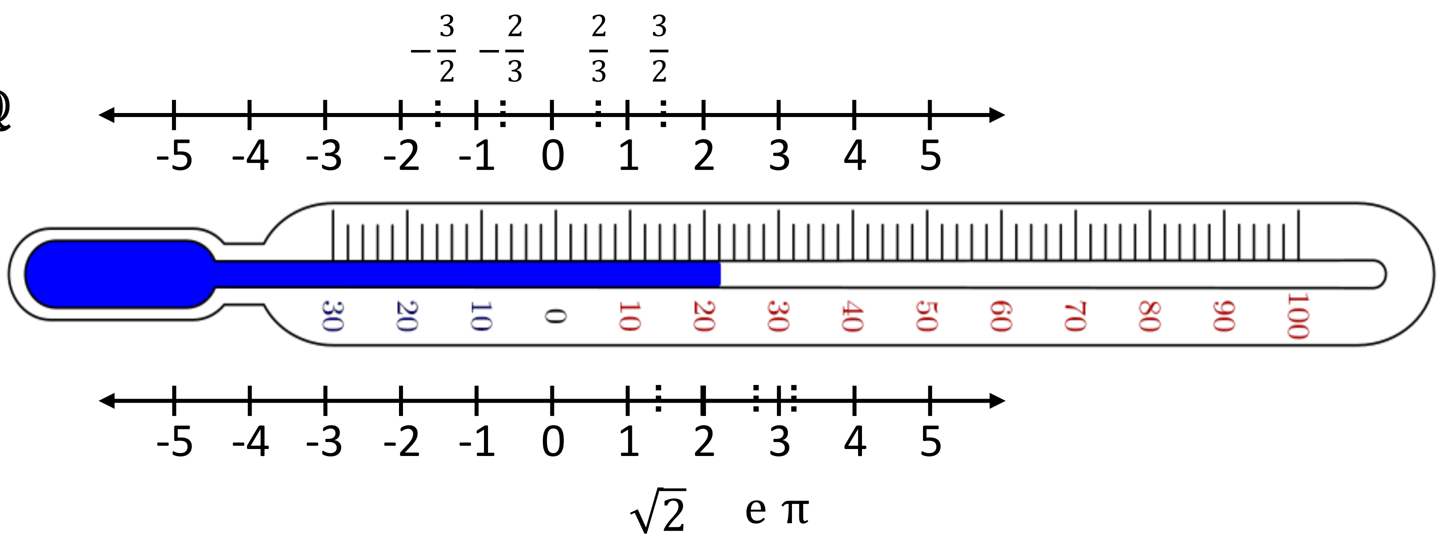
Zahlen bitte

Vergleich von Zahlenmengen am Beispiel eines Flüssigkeitsthermometers

MERKE: Im Beispiel werden die Gradstriche durch die rationalen Zahlen und die blaue Flüssigkeit durch die reellen Zahlen repräsentiert. In der Flüssigkeit gibt es ein Kontinuum, das bei den Gradstrichen so nicht existiert.

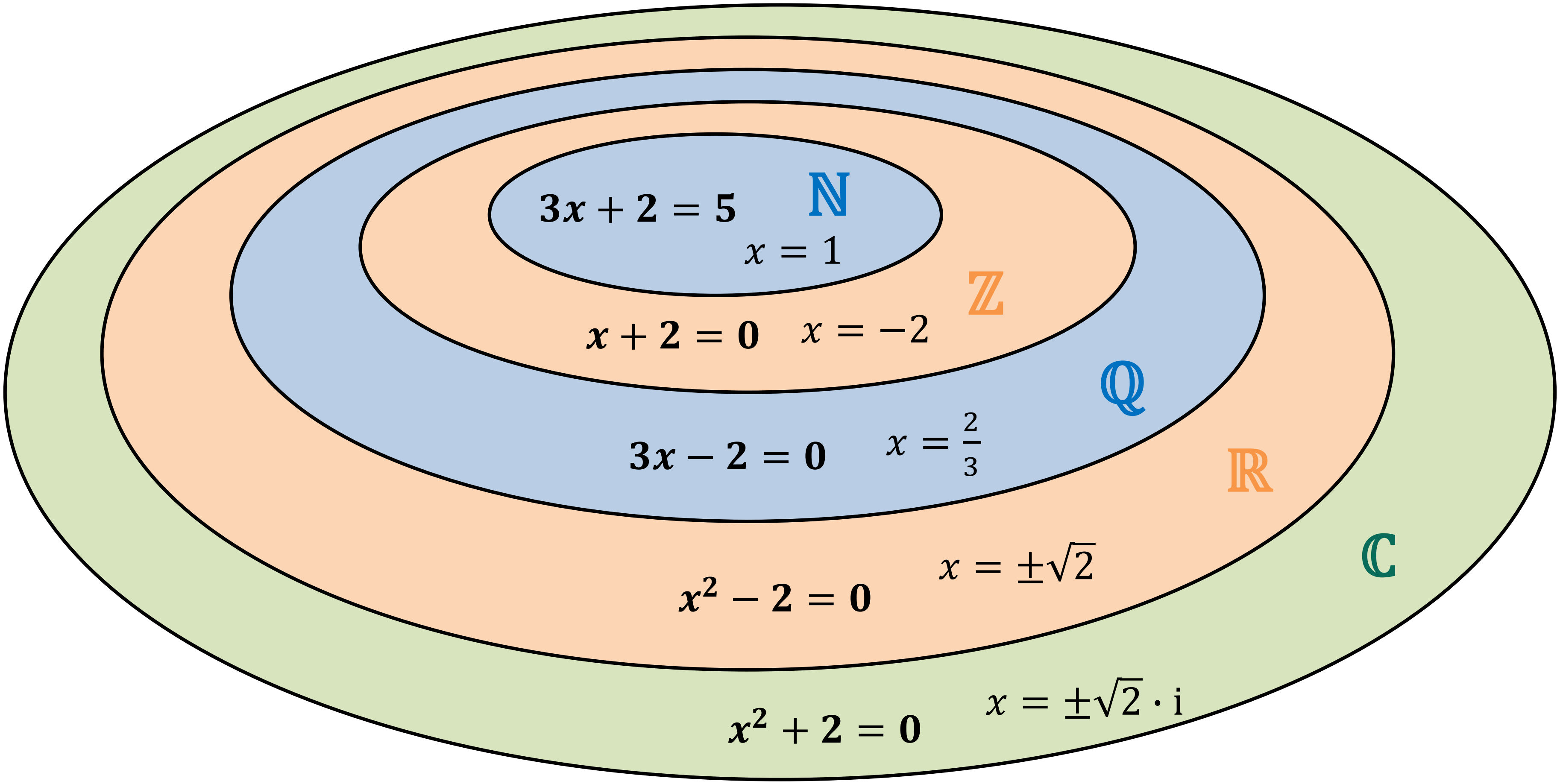
rationale Zahlen $\mathbb{Q}$

reelle Zahlen $\mathbb{R}$



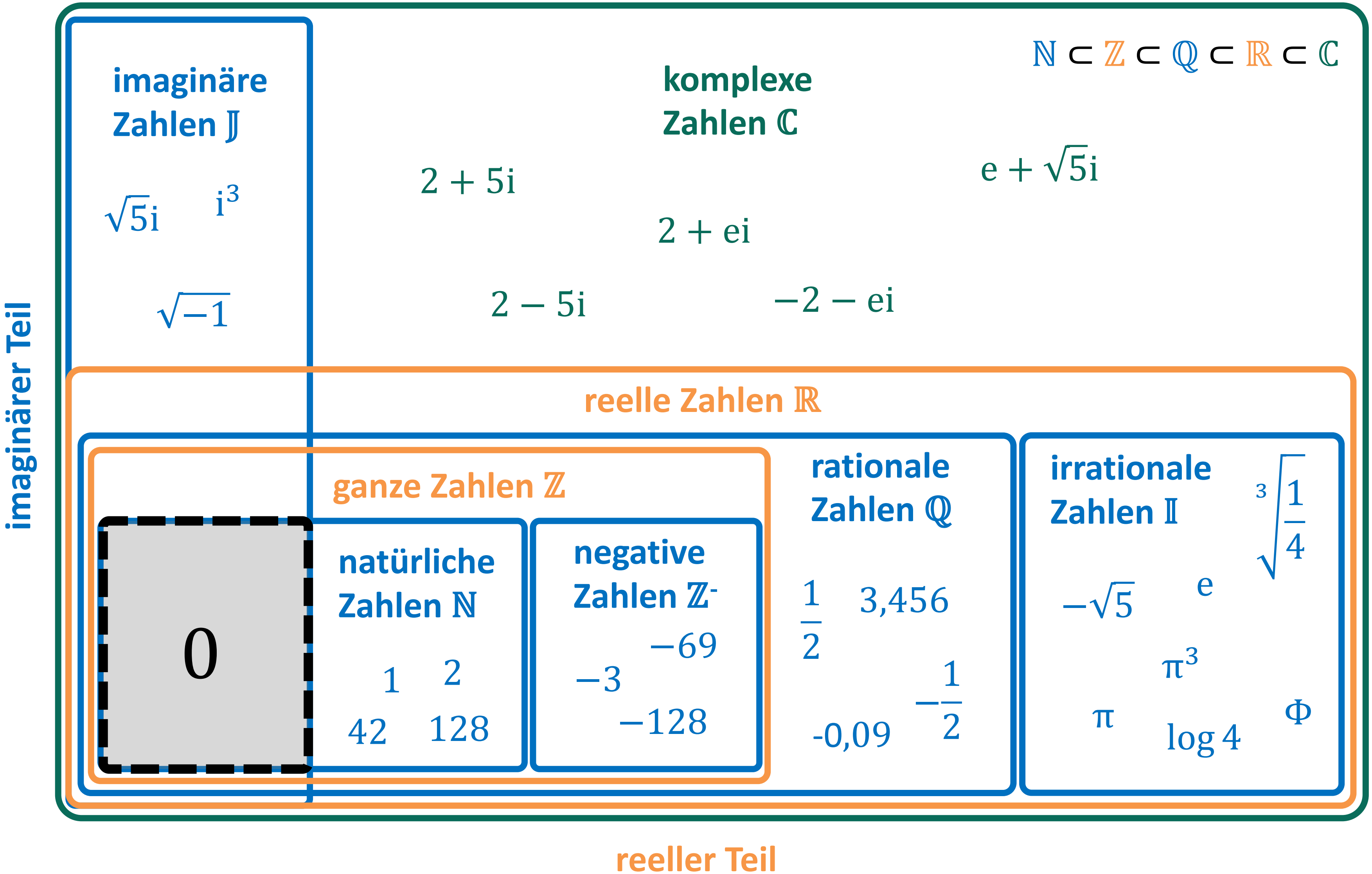
Zahlen bitte

Mit welchen Zahlen können die folgenden exemplarischen Gleichungen gelöst werden?



MERKE: Die eingeführten Zahlenmengen werden dazu verwendet, um bestimmte Rechenaufgaben lösbar zu machen.

Zahlen bitte



Zahlen bitte

Symbole für Teilmengen von Zahlenmengen

Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N}_{\neq 0} = \{x \in \mathbb{N} |\ x \neq 0\}$$

Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}^+ = \mathbb{Z}_{>0} = \{x \in \mathbb{Z} |\ x > 0\}$$

$$\mathbb{Z}^- = \mathbb{Z}_{<0} = \{x \in \mathbb{Z} |\ x < 0\}$$

$$\mathbb{Z}_0^+ = \mathbb{Z}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{Z} |\ x \geq 0\}$$

$$\mathbb{Z}_0^- = \mathbb{Z}_{\leq 0} = \{x \in \mathbb{Z} |\ x \leq 0\}$$

$$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}_{\neq 0} = \{x \in \mathbb{Z} |\ x \neq 0\}$$

Gebrochene Zahlen $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q}^+ = \mathbb{Q}_{>0} = \{x \in \mathbb{Q} |\ x > 0\}$$

$$\mathbb{Q}^- = \mathbb{Q}_{<0} = \{x \in \mathbb{Q} |\ x < 0\}$$

$$\mathbb{Q}_0^+ = \mathbb{Q}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{Q} |\ x \geq 0\}$$

$$\mathbb{Q}_0^- = \mathbb{Q}_{\leq 0} = \{x \in \mathbb{Q} |\ x \leq 0\}$$

$$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}_{\neq 0} = \{x \in \mathbb{Q} |\ x \neq 0\}$$

Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

$$\mathbb{R}^- = \mathbb{R}_{<0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$$

$$\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

$$\mathbb{R}_0^- = \mathbb{R}_{\leq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$$

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_{\neq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$$

Zahlen bitte

MERKE: Eine Variable (Platzhalter, Leerstelle) nennt man ein Symbol, für welches nur Elemente einer Zahlenmenge eingesetzt werden dürfen. Meistens werden für Variablen Buchstaben benutzt. Beim Einsetzen in Variablen muss darauf geachtet werden, dass gleiche Variablen durch gleiche Elemente ersetzt werden.

Schreibweise

x, y, z, T, Φ In dieser Mathevorlesung werden die Variablen *kursiv* geschrieben.

Beispiele mathematische *Variablen*

$x, y, z =$ Koordinaten eines Punktes

$x, y, z \in \mathbb{R}$ oder $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

Beispiele physikalische *Variablen*

$T =$ Temperatur $\Phi =$ Wärmestrom

$T \in \mathbb{R}^+$ $\Phi \in \mathbb{R}_0^+$

Zur Unterscheidung werden in den folgenden Skripten bei funktionalen Zusammenhängen unabhängige Variablen orange (z.B. x) und abhängige Variablen hellblau (z.B. y) geschrieben.

MERKE: Variablen heißen Parameter, wenn sie beliebig wählbar, aber eine feste Größe sind. Manchmal werden sie auch als Koeffizienten bezeichnet.

siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Variable_(Mathematik)

Zahlen bitte

MERKE: Eine Konstante nennt man eine wohldefinierte Zahl, die in der Mathematik oder in anderen Wissenschaften von Interesse ist. Sie wird durch ein Symbol abgekürzt, wenn sie zum Rechnen in Formeln zu lang ist.

Schreibweise

$\mathrm{e}, \Phi, 42, \mathrm{e}, \mathrm{c}$

Beispiele für mathematische Konstanten

$\mathrm{e} = \text{eulersche Zahl} \ \ (2{,}718 \ldots)$

$\Phi = \text{goldener Schnitt} \ \ (1{,}618 \ldots)$

$42 = \text{adamssche Konstante}$ 🤓

Beispiele für physikalische Konstanten

$\mathrm{e} = \text{Elementarladung} \ \ (\approx 1{,}6 \cdot 10^{-19}\mathrm{C})$

$\mathrm{c} = \text{Lichtgeschwindigkeit} \ \left(\approx 3 \cdot 10^{8}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$

siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Mathematische_Konstante

Übungen Zahlenmengen

Übung Zahlenmengen I

Welche Aussagen sind wahr?

1. $\emptyset \in \{1, 2, 3\}$
2. $\emptyset \subseteq \{1, 2, 3\}$
3. $1 \in \{1, 2, 3\}$
4. $1 \subseteq \{1, 2, 3\}$
5. $\{1\} \in \{1, 2, 3\}$
6. $\{1\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
7. $\{1, 2, 3\} \in \{1, 2, 3\}$
8. $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
9. $1 \in \mathbb{N}$
10. $\{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N}$
11. $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{N}$
12. $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{N}$
13. $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$
14. $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$
15. $\mathbb{N} \cup \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{N}$
16. $\mathbb{N} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{N}$
17. $\mathbb{N} \cup \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$
18. $\mathbb{N} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$
19. $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Q} = \emptyset$
20. $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$

Übung Zahlenmengen I

Welche Aussagen sind wahr?

1. $\emptyset \in \{1, 2, 3\}$ ❌
2. $\emptyset \subseteq \{1, 2, 3\}$ ✅
3. $1 \in \{1, 2, 3\}$ ✅
4. $1 \subseteq \{1, 2, 3\}$ ❌
5. $\{1\} \in \{1, 2, 3\}$ ❌
6. $\{1\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ ✅
7. $\{1, 2, 3\} \in \{1, 2, 3\}$ ❌
8. $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ ✅
9. $1 \in \mathbb{N}$ ✅
10. $\{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N}$ ✅
11. $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{N}$ ✅
12. $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{N}$ ✅
13. $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$ ✅
14. $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ ❌
15. $\mathbb{N} \cup \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{N}$ ❌
16. $\mathbb{N} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{N}$ ❌
17. $\mathbb{N} \cup \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$ ✅
18. $\mathbb{N} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ ✅
19. $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Q} = \emptyset$ ✅
20. $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ ❌

Übung Zahlenmengen II

Welche Aussagen sind wahr?

1. $(42, \pi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$
2. $(\pi, \pi, \pi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
3. $\mathbb{N} \times \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$
4. $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$
5. $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$ sind disjunkt
6. $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

Übung Zahlenmengen II

Welche Aussagen sind wahr?

1. $(42, \pi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ ❌ $\pi \notin \mathbb{N}$ ($\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ wäre somit okay)
2. $(\pi, \pi, \pi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ✅ $\pi \in \mathbb{R}$
3. $\mathbb{N} \times \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ ✅ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$
4. $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ ✅ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$
5. $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$ sind disjunkt ❌ $(1, 1)$ kommt in beiden Mengenprodukten vor
6. $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ ❌ $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \neq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$(\pi, \pi) \neq (\pi, \pi, \pi)$
Paare und Tripel sind immer verschieden

Lerneinheit 1.4
Zahlenoperationen

Addition, Multiplikation, Potenzieren
und die Umkehroperationen

Leitfrage

Wie kann man mit Zahlen rechnen?

Zahlenoperationen

MERKE: Addition & Subtraktion sind zweistellige Verknüpfungen von Zahlen.

Addition	**Darstellung**	**Beispiel**
Summand + Summand = Summe	$a + b = c$	$6 + 2 = 8$

Für wiederkehrende Summationen verwendet man das Summenzeichen (großes Sigma):

Endwert

$$\sum_{k=1}^{4} k^2$$

Laufvariable k wird mit jedem Durchlauf um 1 erhöht.

dieser Term wird aufsummiert hier: $1 + 4 + 9 + 16 = 30$

$k = \; 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$

Startwert

Subtraktion	**Darstellung**	**Beispiel**
Minuend - Subtrahend = Differenz	$a - b = c$	$6 - 2 = 4$

siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Addition

Zahlenoperationen

MERKE: Multiplikation und Division sind zweistellige Verknüpfungen von Zahlen.

Multiplikation	**Darstellung**	**Beispiel**
Faktor · Faktor = Produkt	$a \cdot b = c$	$6 \cdot 2 = 12$

Für wiederkehrende Multiplikation verwendet man das Produktzeichen (großes Pi):

Endwert

$$\prod_{k=1}^{4} k^2$$

Laufvariable k wird mit jedem Durchlauf um 1 erhöht.

dieser Term wird aufmultipliziert hier: $1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16 = 576$

$k = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$

Startwert

Division	**Darstellung**	**Beispiel**
Dividend ÷ Divisor = Quotient	$a \div b = c$	$6 \div 2 = 3$
Zähler → Dividend, Nenner → Divisor: $\frac{\text{Dividend}}{\text{Divisor}} = \text{Quotient}$	$\frac{a}{b} = c$	$\frac{10}{4} = 2{,}5$

siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Multiplikation

Zahlenoperationen

MERKE: Addition und Multiplikation von reellen Zahlen haben jeweils ein neutrales Element, das keine Änderung des Wertes einer Zahl ergibt, wenn man addiert bzw. multipliziert.

neutrales Element der Addition: 0

neutrales Element der Multiplikation: 1

MERKE: Zu jeder reellen Zahl gibt es inverse Elemente, die bei der Addition bzw. Multiplikation mit der reellen Zahl das neutrale Element ergeben.

Beispiele

Das inverse Element zur 5 ist bei der Addition die -5, da gilt $5 + (-5) = 0$

Das inverse Element zur 5 ist bei der Multiplikation die $1/5$, da gilt $5 \cdot (1/5) = 1$

siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Addition

Zahlenoperationen

	Darstellung	Beispiel
Potenzieren		
$\text{Basis}^{\text{Exponent}} = \text{Potenzwert}$	$b^a = c$	$2^3 = 8$
	a ist der Exponent; b ist die Basis	
Radizieren	$\sqrt[a]{b} = c$	$\sqrt[3]{8} = 2$
$\sqrt[\text{Wurzelexponent}]{\text{Radikand}} = \text{Wurzelwert}$	$b^{\frac{1}{a}} = c$	$8^{\frac{1}{3}} = 2$
	a ist der Wurzelexponent; b ist der Radikand	
Logarithmieren		
$\log_{\text{Basis}} \text{Numerus} = \text{Logarithmuswert}$	$\log_b a = c$	$\log_2 8 = 3$
	a ist der Numerus; b ist die Basis	

MERKE: Das Potenzieren hat zwei Umkehrungen, das Radizieren und das Logarithmieren. Die Anwendung erfolgt je nachdem, ob die Basis oder der Exponent berechnet werden soll.

siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Potenz_(Mathematik)

Zahlenoperationen

Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)
Vertauscht man in einer Summe die Summanden, ändert sich das Ergebnis nicht. Vertauscht man in einem Produkt die Faktoren, ändert sich das Ergebnis nicht.

Formeln

$a + b = b + a$ $\quad$ $a + (-b) = (-b) + a$

$a \cdot b = b \cdot a$ $\quad$ $a \cdot (-b) = (-b) \cdot a$

Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz)
In Summen mit mehreren Summanden kann man in beliebiger Reihenfolge addieren. In Produkten mit mehreren Faktoren kann man in beliebiger Reihenfolge multiplizieren.

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Distributivgesetz (Verteilungsgesetz)
Man kann eine Zahl, mit einer Summe multiplizieren, indem man diese Zahl mit dem Summanden multipliziert und die Produkte addiert.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$a \cdot \big((-b) + (-c)\big) = \Big(\big(a \cdot (-b)\big) + \big(a \cdot (-c)\big)\Big)$$

ACHTUNG: <u>Subtraktion</u>, <u>Division</u>, <u>Potenzieren</u>, <u>Radizieren</u> und <u>Logarithmieren</u> sind <u>weder kommutativ noch assoziativ</u>! Das ist natürlich blöd, aber nicht zu ändern, deshalb bitte merken.

Zahlenoperationen (Bruchrechnung)

Regel	Beschreibung	Beispiel $a, b, c, d, r \in \mathbb{R}^*$
	$\frac{a}{b}$ ← Zähler / Nenner $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}^*$	
$\frac{a}{b} \cdot r = \frac{a \cdot r}{b}$	Multiplikation mit reellen Zahlen r.	$\frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3 \cdot 2}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
$\frac{a}{b} : r = \frac{a}{b \cdot r}$	Division durch reelle Zahlen $r \neq 0$.	$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4 \cdot 2} = \frac{3}{8}$
$\frac{a}{b} \cdot 0 = 0$	Satz vom Nullprodukt.	$\frac{3}{4} \cdot 0 = 0$ $\frac{0}{4} \cdot 3 = 0$
$\frac{a}{0} = ?$	Division durch Null ist nicht definiert.	
$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$	Addition / Subtraktion gleichnamiger Brüche.	$\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{3-2}{4} = \frac{1}{4}$
$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{c \cdot d}$	Addition / Subtraktion ungleichnamiger Brüche.	$\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{4 \cdot 3} = \frac{11}{12}$

Zahlenoperationen (Potenzrechnung)

Regel	Beschreibung	Beispiel
$b^0 = 1$	Potenz mit Exponent Null	$\pi^0 = 1$
$0^a = 0$	Potenz mit Basis Null	$0^\pi = 0$
$0^0 = ?$	Null hoch Null ist unbestimmt	
$b^1 = b$	Potenz mit Exponent Eins	$\pi^1 = \pi$
$b^{a_1} \cdot b^{a_2} = b^{a_1 + a_2}$	Multiplikation Potenzen gleiche Basis	$2^{40} \cdot 2^2 = 2^{42}$
$(b^{a_1})^{a_2} = b^{a_1 \cdot a_2}$	Potenzierung von Potenzen	$(2^{40})^2 = 2^{80}$
${b_1}^a \cdot {b_2}^a = (b_1 \cdot b_2)^a$	Multiplikation Potenzen gleicher Exponent	$2^2 \cdot 3^2 = (6)^2 = 36$
$b^{-a} = \frac{1}{b^a}$	Potenz mit negativen Exponenten	$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$
$\frac{b^{a_1}}{b^{a_2}} = b^{a_1 - a_2}$	Division Potenzen gleicher Basis	$\frac{2^7}{2^2} = 2^5 = 32$
	Exponent ist ein Bruch $2^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt[2]{2}$	

Zahlenoperationen (Logarithmusrechnung)

Regel	Beschreibung	Beispiel
$\log(1) = 0$	Logarithmus von 1 (alle Basen)	$\ln(1) = 0 \quad \log_\pi(1) = 0$
$\log(x) + \log(y) = \log(x \cdot y)$	Addition von Logarithmen	$\log(2) + \log(5) = \log(10)$
$-\log(x) = \log\left(\frac{1}{x}\right)$	Negation von Logarithmen	$-\log(2) = \log\left(\frac{1}{2}\right)$
$\log(x) - \log(y) = \log\left(\frac{x}{y}\right)$	Subtraktion von Logarithmen	$\log(2) - \log(5) = \log\left(\frac{2}{5}\right)$
$n \cdot \log(x) = \log(x^n)$	Multiplikation mit einer Zahl	$5 \cdot \log(2) = \log(2^5)$
$\frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} = \log_b(x)$	Basiswechsel	$\frac{\lg(2)}{\lg(5)} = \log_5(2)$

Zahlenoperationen

Division mit Null

$\frac{3}{8}$ ist die Antwort aus die Frage: Was ist x für $8 \cdot x = 3$?

$\frac{0}{8}$ wäre die Antwort aus die Frage: Was ist x für $8 \cdot x = 0$?
Deshalb ist das Ergebnis einer <u>Division von Null immer Null</u>.

$\frac{3}{0}$ wäre die Antwort aus die Frage: Was ist x für $0 \cdot x = 3$?
Eine solche Zahl x existiert offenbar nicht. Deshalb ist die <u>Division durch Null nicht definiert</u>.

$\frac{0}{0}$ wäre die Antwort aus die Frage: Was ist x für $0 \cdot x = 0$?
Hier kann x jede Zahl sein. Deshalb ist die Division von <u>Null durch Null auch nicht definiert</u>.

$\frac{0}{0}$ kommt oft in Form der Terme 0^0, ∞^0, 1^∞, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $0 \cdot \infty$ oder $\infty - \infty$ vor. Diese Terme sind deshalb in der Regel auch nicht definiert. Manchmal ist es aber sinnvoll solchen Ausdrücken einen Wert zuzuweisen, wie z. B. $0^0 = 1$ in Potenzreihenentwicklungen. Dann muss man aber bei der Potenzrechnung aufpassen, da dann z.B. $0^{(0^0)} = 0^1 = 0$ gilt.

MERKE: Beim Rechnen mit der Null muss man also immer gut überlegen, was gemeint ist!

Zahlenoperationen

MERKE: Die Terme 0^0, ∞^0, 1^∞, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ und $\infty - \infty$ lassen sich alle auf den unbestimmten Term $\frac{0}{0}$ zurückführen:

Annahme: $\frac{1}{0}$ strebt gegen $\pm\infty$, dann gelten:

$$\frac{0}{0} = \frac{1/0}{1/0} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \qquad \frac{0}{0} = 0 \cdot \frac{1}{0} = 0 \cdot \pm\infty$$

und daraus folgen:

$$\frac{0}{0} = \frac{\frac{0}{0} - \frac{0}{0}}{0 \cdot 0} = \frac{\frac{\infty}{\infty} - \frac{\infty}{\infty}}{\frac{1}{\infty} \cdot \frac{1}{\infty}} = \frac{\cancel{\frac{1}{\infty}} \cdot (\infty - \infty)}{\cancel{\frac{1}{\infty}}} = \infty - \infty$$

$$e^{\frac{0}{0}} = e^{0 \cdot \infty} = e^{0 \cdot \ln(\infty)} = e^{\ln(\infty^0)} = \infty^0$$

$$e^{\frac{0}{0}} = e^{0 \cdot \infty} = e^{\infty \cdot \ln(1)} = e^{\ln(1^\infty)} = 1^\infty$$

$$e^{\frac{0}{0}} = e^{0 \cdot (-\infty)} = e^{0 \cdot \ln(0)} = e^{\ln(0^0)} = 0^0$$

MERKE: Solche Ausdrücke treten oft in ingenieurwissenschaftlichen Problemstellungen auf. Für viele dieser Ausdrücke gibt es jedoch Lösungen, die mit Hilfe von Grenzwertbetrachtungen gefunden werden können (siehe Kapitel Veränderungen kalkulieren).

Extrafutter Zahlenoperationen (Hyper-Operatoren)

Stufe 0: Hinzuzählen	$n = a + 1$	Grundoperation (Zahl a und eine 1 dazu)
Stufe 1: Addieren	$n = a + b = a + 1 + \ \dots\ + 1$	wiederholtes Hinzuzählen (b Kopien von 1)
Stufe 2: Multiplizieren	$n = a \cdot b = a + a + \ \dots\ + a$	wiederholtes Addieren (b Kopien von a)
Stufe 3: Potenzieren	$n = a^b = a \cdot a \cdot \ \dots\ \cdot a = a \uparrow b$	wiederholtes Multiplizieren (b Kopien von a)
Stufe 4: Tetration	$n = {}^{b}a = a^{a^{a^{\cdots^{a}}}} = a \uparrow\uparrow b$	wiederholtes Potenzieren (b Kopien von a)
Stufe 5: Pentation	$n = a \uparrow\uparrow\uparrow b = a \uparrow\uparrow a \uparrow\uparrow a \dots a \uparrow\uparrow a$	wiederholtes Tetraieren (b Kopien von a)
Stufe … : … ation (hexa, hepta, okta usw.)	$n = a \dots b$	… ist die Anzahl der Pfeile (b Kopien von a)

MERKE: Rechenoperationen können in $\mathbb{N}$ als wiederholtes Ausführen der vorhergehenden Stufe aufgefasst werden. Dies kann auf die anderen Zahlenmengen übertragen werden.

siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Hyper-Operator

Übungen Zahlenoperationen

Übung Zahlenoperationen I

Welche Aussagen sind wahr $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R})$?

1. $6a - 6b = a - b$
2. $8 \cdot a \cdot b + (-a \cdot b) = 8$
3. $2(ab) = 4ab$
4. $a(b + c) = ab + ac$
5. $2a + a3 = 9a$
6. $b + (3b + 4b) = 9b$
7. $3a - a = 3$
8. $-(-a) = a$
9. $a + bc = (a + b) \cdot (a + c)$
10. $-(a - b) = b - a$

Übung Zahlenoperationen I

Welche Aussagen sind wahr $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R})$?

1. $6a - 6b = a - b$ ❌ $= 6(a - b)$
2. $8 \cdot a \cdot b + (-a \cdot b) = 8$ ❌ $= 8ab - ab = (8 - 1)ab = 7ab$
3. $2(ab) = 4ab$ ❌ $= 2ab$
4. $a(b + c) = ab + ac$ ✅ Verteilungsgesetz
5. $2a + a3 = 9a$ ❌ $= 2a + 3a = (2 + 3)a = 5a$
6. $b + (3b + 4b) = 9b$ ❌ $= 8b$
7. $3a - a = 3$ ❌ $= 2a$
8. $-(-a) = a$ ✅ $= -1 \cdot (-1 \cdot a) = 1 \cdot a = a$
9. $a + bc = (a + b) \cdot (a + c)$ ❌ kann nicht vereinfacht werden
10. $-(a - b) = b - a$ ✅ $= -1 \cdot \big(a + (-1 \cdot b)\big) = -a + b = b - a$

Übung Zahlenoperationen II

Welche der folgenden Gleichungen sind richtig $(a \in \mathbb{R})$?

1. $(a^4)^7 = a^{11}$

2. $\sqrt{a^2} = a$

3. $a^8 - a = a^7$

4. $(a+b)^3 = a^3 + b^3$

5. $3 \cdot 5^4 = 15^4$

6. $\sqrt{25} = \pm 5$

7. $(-a)^2 = -a^2$

8. $(1+a)^3 = 1 + a^3$

9. $a^{-5} = -a^5$

10. $a^{2/3} = \sqrt[2]{a^3}$

Übung Zahlenoperationen II

Welche der folgenden Gleichungen sind richtig ($a \in \mathbb{R}$)?

1. $(a^4)^7 = a^{11}$ ✗ $= a^{(4\cdot7)} = a^{28}$
2. $\sqrt{a^2} = a$ ✗ $= |a|$
3. $a^8 - a = a^7$ ✗ $= a(a^7 - 1)$
4. $(a+b)^3 = a^3 + b^3$ ✗ $= (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5. $3\cdot5^4 = 15^4$ ✗ $= 3\cdot625 = 1\,875 \quad (15^4 = 50\,625)$
6. $\sqrt{25} = \pm5$ ✗ $= +5$
7. $(-a)^2 = -a^2$ ✗ $= (-1\cdot a)^2 = (-1)^2(a)^2 = a^2$
8. $(1+a)^3 = 1 + a^3$ ✗ $= 1 + 3a + 3a^2 + a^3$
9. $a^{-5} = -a^5$ ✗ $= 1/a^5$
10. $a^{2/3} = \sqrt[2]{a^3}$ ✗ $= \sqrt[3]{a^2}$

Übung Zahlenoperationen III

Vereinfachen Sie Rechenoperationen $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R})$.

1. $\ln(a \cdot b)$
2. $\log_7(a^3)$
3. $\log_5(1/a)$
4. $\lg(a/(b + c))$
5. $\lg(\pi)/\lg(e)$
6. $\log_a((a^b)^c)$
7. $\log_7(\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}})$
8. $\log_3(\log_a(b^3))$

Übung Zahlenoperationen III

Vereinfachen Sie Rechenoperationen $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R})$.

1. $\ln(a \cdot b)$ $= \ln(a) + \ln(b)$
2. $\log_7(a^3)$ $= 3 \cdot \log_7(a)$
3. $\log_5(1/a)$ $= -\log_5(a)$
4. $\lg(a/(b+c))$ $= \ln(a) - \ln(b+c)$
5. $\lg(\pi)/\lg(e)$ $= \log_e(\pi) = \ln(\pi)$
6. $\log_a((a^b)^c)$ $= \log_a(a^{bc}) = bc \cdot \log_a(a) = bc$
7. $\log_7(\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}})$ $= \log_7((a^{1/3})^{1/5}) = \log_7(a^{1/15}) = 1/15 \cdot \log_7(a)$
8. $\log_3(\log_a(b^3))$ $= \log_3(3 \cdot \log_a(b)) = \log_3(3) + \log_3(\log_a(b))$
   $= 1 + \log_3(\log_a(b))$

Übung Zahlenoperationen IV

Berechnen Sie (mit Papier und Kopf)

1. $\log_2(16)$
2. $\lg(1\,000)$
3. $\log_3(1/9)$
4. $\ln(\mathrm{e})$
5. $5 \cdot \log_2(2)$
6. $\log_2(8 \cdot 32)$
7. $\log_{10}(5^4) + \log_{10}(16)$
8. $\log_4(\sqrt[3]{16})$

Übung Zahlenoperationen IV

Berechnen Sie (mit Papier und Kopf)

1. $\log_2(16)$ $= \mathbf{4}$ (Probe: $16 = 2^4$)
2. $\lg(1\,000)$ $= \log_{10}(1\,000) = \mathbf{3}$ (Probe: $1\,000 = 10^3$)
3. $\log_3(1/9)$ $= \mathbf{-2}$ (Probe: $1/9 = 1/3^2 = 3^{-2}$)
4. $\ln(\mathrm{e})$ $= \log_{\mathrm{e}}(\mathrm{e}) = \mathbf{1}$
5. $5 \cdot \log_2(2)$ $= 5 \cdot 1 = \mathbf{5}$
6. $\log_2(8 \cdot 32)$ $= \log_2(8 \cdot 32) = \log_2(256) = \mathbf{8}$ (Probe: $256 = 2^8$)
7. $\log_{10}(5^4) + \log_{10}(16)$ $= \log_{10}(5^4 \cdot 2^4) = \log_{10}(10^4) = 4 \cdot \log_{10}(10) = \mathbf{4}$
8. $\log_4(\sqrt[3]{16})$ $= \log_4(16^{1/3}) = 1/3 \cdot \log_4(16) = 1/3 \cdot 2 = \mathbf{2/3}$

Lerneinheit 1.5
Rechnen mit Einheiten

sieben physikalische Basisgrößen im SI-System:
Zeit, Länge, Masse , Stoffmenge, Temperatur, Stromstärke, Lichtstärke

Zahlen bitte

MERKE: im SI-System (Système International d'Unités) wurden sieben physikalische Basisgrößen Länge, Masse, Zeit, Stromstärke, Temperatur, Stoffmenge und Lichtstärke festgelegt. Diese sind voneinander linear unabhängig sind, d. h. jede für sich kann nicht aus den anderen Basisgrößen abgeleitet werden. Das SI-System ist in Deutschland per Gesetz eingeführt.

Basisgröße	Größen-symbol	Dimensions-symbol	Einheit	Einheiten-zeichen
Länge	l	L	Meter	m
Masse	m	M	Kilogramm	kg
Zeit, Dauer	t	T	Sekunde	s
Stromstärke	I	I	Ampere	A
Temperatur	T	Θ	Kelvin	K
Stoffmenge	n	N	Mol	mol
Lichtstärke	I_v	J	Candela	cd

Zahlen bitte

MERKE: Eine physikalische Größe Q (engl. quantity) wird als (reeller) Zahlenwert multipliziert mit einer Einheit definiert. Die Einheit entspricht der Dimension der Größe. Sie ergibt sich aus der Multiplikation von in der Regel ganzzahligen Potenzen der SI-Basiseinheiten Sekunde, Meter, Kilogramm, Ampere, Candela, Kelvin und Mol der SI-Basisgrößen.

$Q = k \cdot \text{Einheit}$ $\qquad k \in \mathbb{R}$

$Q = k \cdot m^{\alpha} \cdot kg^{\beta} \cdot s^{\gamma} \cdot A^{\delta} \cdot T^{\varepsilon} \cdot mol^{\zeta} \cdot Cd^{\eta}$ $\qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta \in \mathbb{Z}$

Beispiel Q = F (Kraft) Einheit = N (Newton)

$F = k \cdot N$ mit $k = 10$ folgt $F = 10 \cdot N = 10N$

Wie groß sind die Potenzen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta$?

$$F = 10 \cdot m^1 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^0 \cdot Cd^0 \cdot K^0 \cdot mol^0 = \frac{m \cdot kg}{s^2}$$

Zahlen bitte

Addition von physikalischen Größen

MERKE: Es können nur die reellen Zahlen von Einheiten mit gleicher Dimension miteinander addiert oder voneinander subtrahiert werden.

Beispiele

$3\text{m} + 2\text{m} = 5\text{m}$

$293\text{K} - 273\text{K} = 20\text{K}$

$3\text{m} + 2\text{kg} = \emptyset$

$293\text{K} - 273°\text{C} = \emptyset$

Multiplikation von physikalischen Größen

MERKE: Reelle Zahlen von Einheiten mit gleicher oder verschiedener Dimension können miteinander multipliziert oder durcheinander dividiert werden. Es entstehen neue Größen.

Beispiele

$3\text{m} \cdot 2\text{m} = 6\text{m}^2$

$\text{Länge} \cdot \text{Länge} = \text{Fläche}$

$20\text{m} \div 10\text{s} = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$\text{Länge} \div \text{Zeit} = \text{Geschwindigkeit}$

$2\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \div 0{,}2\text{s} = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$\text{Geschwindigkeit}/\text{Zeit}$
$= \text{Beschleunigung}$

$80\text{kg} \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 800\,\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = 800\text{N}$

$\text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung} = \text{Kraft}$

Extrafutter: die definierenden Konstanten SI-Systems

die Sekunde (Symbol s)

ist die SI-Einheit der Zeit. Sie wird durch der Cäsiumfrequenz Δf, der Frequenz des ungestörten Hyperfeinübergangs des Grundzustands des Cäsium-Isotops 133Cs definiert. Der Zahlenwert der Konstante ist auf Δf = 9 192 631 770 Hz bzw. s^{-1} festgelegt.

der Meter (Symbol m)

ist die SI-Einheit der Länge. Er wird definiert durch die Konstante der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum c. Der Zahlenwert dieser Konstante ist auf c = 299 792 458 $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ festgelegt, wenn die Sekunde durch Δf definiert ist.

das Kilogramm (Symbol kg)

ist die SI-Einheit der Masse. Es wird durch die Planck-Konstante h definiert. Der Zahlenwert der Konstante ist auf h = 6,626 070 15 · 10^{-34} $\mathrm{J} \cdot \mathrm{s}$ (bzw. $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$) festgelegt wenn die Sekunde und der Meter durch Δf und c definiert sind.

das Mol (Symbol mol)

ist die SI-Einheit der Stoffmenge. Sie wird durch die Avogadrokonstante N_A = 6,022 140 76 · 10^{23} Einzelteilchen mal mol^{-1} festgelegt. Die spezifizierten Einzelteilchen können z. B. Atome, Moleküle, Ionen, Elektronen sein.

siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Hyper-Operator

Extrafutter: die definierenden Konstanten SI-Systems

das Kelvin (Symbol K)

ist die SI-Einheit der thermodynamischen Temperatur. Es wird durch die Boltzmann- Konstante k definiert. Der Zahlenwert der Konstante ist auf $1{,}380\,649 \cdot 10^{-23}$ Einheit J · K−1 bzw. kg · m2 · s−2 · K−1 festgelegt, und das Kilogramm, der Meter und die Sekunde durch h, c und Δf definiert sind.

das Ampere (Symbol A)

ist die SI-Einheit der Stromstärke. Es wird definiert durch die Konstante der Elementarladung e. Der Zahlenwert dieser Konstante ist auf $1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$ C bzw. A · s festgelegt, wenn die Sekunde durch Δv definiert ist.

die Candela (Symbol Cd)

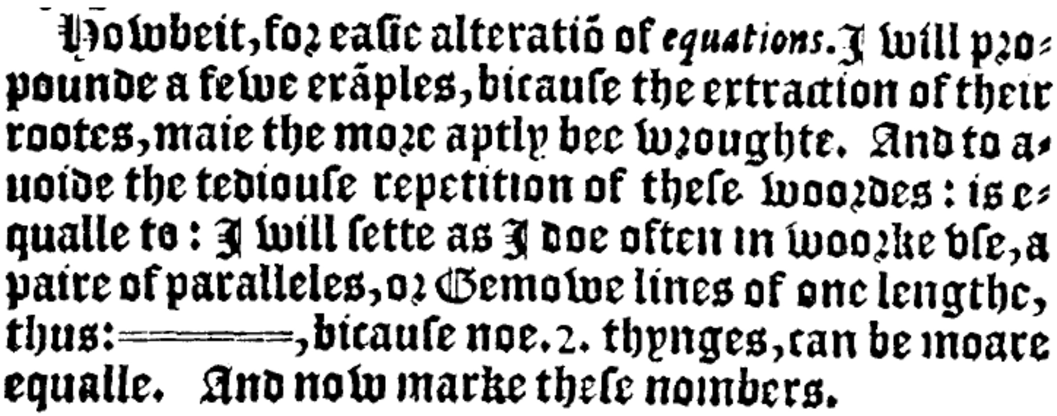
ist die SI-Einheit der Lichtstärke in einer bestimmten Raumrichtung. Sie wird durch die Konstante K_{cd}, das photometrische Strahlungsäquivalent einer monochromatischen Strahlung von $540 \cdot 10^{12}$ Hz definiert . Der Zahlenwert dieser Konstante ist auf 683 $\mathrm{lm} \cdot \mathrm{W}^{-1}$ bzw. $\mathrm{cd} \cdot \mathrm{sr} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{s}^{3}$ festgelegt, wenn das Kilogramm, der Meter und die Sekunde durch h, c und Δf definiert sind.

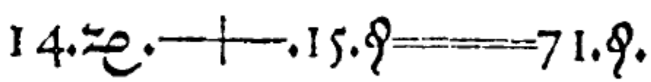
Lerneinheit 1.6 Gleichungen und Ungleichungen für Zahlen

Rechnen mit Unbekannten

Gleichungen und Ungleichungen für Zahlen

MERKE: Eine Gleichung macht eine Aussage über die Gleichheit zweier in Relation stehender Terme T_1 und T_2. Eine wahre Aussage wird das durch das Gleichheitszeichen symbolisiert: $\mathrm{T}_1 = \mathrm{T}_2$. Das Gleichheitszeichen wurde von Robert Recorde 1557 eingeführt.


Howbeit, for easie alteratiō of *equations*. I will propounde a fewe exāples, bicause the extraction of their rootes, maie the more aptly bee wroughte. And to avoide the tediouse repetition of these woordes: is equalle to: I will sette as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: ═════, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle. And now marke these nombers.



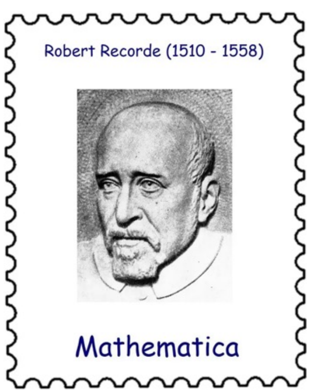
To avoid the tedious repetition of these words: "is equal to", I will set (as I do often in work use) a pair of parallels, or Gemowe* lines, of one length (thus =), because no two things can be more equal. And now marke these numbers.

$$14x + 15 = 71$$

*from Latin ‚gemellus' meaning twin

älteste gedruckte Gleichung mit dem Symbol =

Kurzbiografie auf spektrum.de



Robert Recorde (1510 -1558)
Erfinder des Gleichheitszeichens

Gleichungen und Ungleichungen für Zahlen

MERKE: Bestimmungsgleichungen dienen zur Berechnung der Zahlenwerte von Variablen. Es können eine Variable x oder mehrere Variablen x, y, z, ... auftreten. Frei wählbare Konstanten, die an die Variablen multipliziert werden, werden Parameter $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}$, ... genannt. Zahlentupel, die eine Gleichung identisch erfüllen, heißen Lösungen der Gleichung. Alle Lösungen ergeben die Lösungsmenge.

MERKE: In linearen Gleichungen sind Variablen durch die Addition miteinander verknüpft. Jede Variable kommt nur mit ihrer ersten Potenz vor.

$$\mathrm{a}x^1 + \mathrm{b}y^1 + \mathrm{c}z^1 + \cdots = \mathrm{Zahl}$$

Beispiel

$$14x + 15y + 16z = 71$$

MERKE: In nichtlinearen Gleichungen treten Variablen auch z. B. in Basen von Potenzen, Wurzeln, Exponenten, Logarithmen oder in trigonometrischen Ausdrücken auf.

Beispiel

$$14x^2 + 15^y \cdot \sin(z) - 10 = 0$$

siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Gleichung#cite_note-1

Gleichungen und Ungleichungen für Zahlen

MERKE: In homogenen linearen Gleichungen kommen nur Vielfache von Variablen vor.

$$\mathrm{a}x + \mathrm{b}y + \mathrm{c}z + \cdots = 0$$

MERKE: Für homogene linearen Gleichungen gilt für Lösungen das Superpositionsprinzip. D.h., wenn es Lösungen außer der Nulllösung gibt, dann ist auch die Summe der Lösungen ein Lösung.

$$\mathrm{L} = \{(x_1, y_2, z_3, \dots), (x_2, y_2, z_2, \dots), \dots\}$$

$$\mathrm{L} = \{(x_\mathrm{h}, y_\mathrm{h}, z_\mathrm{h}, \dots)\}$$

Beispiel

$$14x + 15y = 0 \qquad x, y \in \mathbb{Z}$$

$$15y = -14x$$

$$y = -\frac{14}{15}x$$

Lösungen sind z.B.:

$$x_1 = 15,\ \ y_1 = -\frac{14}{15} \cdot 15 = -14$$

$$x_2 = 30,\ \ y_2 = -\frac{14}{15} \cdot 30 = -28$$

$$x_3 = x_1 + x_2,\ \ y_3 = y_1 + y_2 \qquad \text{usw.}$$

$$x_\mathrm{h} = 15 \cdot \mathrm{n},\ \ y_\mathrm{h} = -14 \cdot \mathrm{n} \qquad \mathrm{n} \in \mathbb{Z}$$

$$\mathrm{L} = \left\{ \begin{array}{r} (x_\mathrm{h}, y_\mathrm{h}) | (x_\mathrm{h} = 15 \cdot \mathrm{n}) \wedge \\ (y_\mathrm{h} = -14 \cdot \mathrm{n}) \wedge \\ (x_\mathrm{h}, y_\mathrm{h} \in \mathbb{Z}) \wedge (\mathrm{n} \in \mathbb{Z}) \end{array} \right\}$$

siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Gleichung#cite_note-1

Gleichungen und Ungleichungen für Zahlen

MERKE: In inhomogenen linearen Gleichungen kommen auch reine Zahlen ungleich 0 vor.

$$\mathrm{a}x + \mathrm{b}y + \mathrm{c}z + \cdots = \mathrm{Zahl}$$

$$\mathrm{L} = \{x_\mathrm{h} + x_\mathrm{p}, y_\mathrm{h} + y_\mathrm{p}, z_\mathrm{h} + z_\mathrm{p}, \ldots\}$$

MERKE: Für inhomogene lineare Gleichungen Ergeben sich Lösungen als Summe der zugehörigen homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung.

$$\mathrm{L} = \left\{\begin{array}{c} (x_1 + x_\mathrm{p}, y_2 + y_\mathrm{p}, z_3 + z_\mathrm{p}, \ldots), \\ (x_2 + x_\mathrm{p}, y_2 + y_\mathrm{p}, z_2 + z_\mathrm{p}, \ldots), \\ \ldots \end{array}\right\}$$

$$\mathrm{L} = \{(x_\mathrm{inh}, y_\mathrm{inh}, z_\mathrm{inh}, \ldots)\}$$

Beispiel

$$14x + 15y = 1 \qquad x, y \in \mathbb{Z}$$

$$x_\mathrm{h} = 15 \cdot \mathrm{n}, \quad y_\mathrm{h} = -14 \cdot \mathrm{n} \qquad \mathrm{n} \in \mathbb{Z}$$

$$y = -\frac{14}{15}x + \frac{1}{15}$$

eine partikuläre Lösung ist:

$$x_\mathrm{p} = \frac{1}{14}, \quad y_\mathrm{p} = 0$$

$$x_\mathrm{inh} = x_\mathrm{h} + x_\mathrm{p} \qquad y_\mathrm{inh} = y_\mathrm{h} + y_\mathrm{p}$$

$$x_\mathrm{inh} = 15 \cdot \mathrm{n} + \frac{1}{14} \quad y_\mathrm{inh} = -14 \cdot \mathrm{n} + 0$$

$$\mathrm{L} = \left\{\begin{array}{r} (x_\mathrm{inh}, y_\mathrm{inh}) \mid \left(x_\mathrm{inh} = 15 \cdot \mathrm{n} + \frac{1}{14}\right) \wedge \\ (y_\mathrm{inh} = -14 \cdot \mathrm{n}) \wedge \\ (x_\mathrm{inh}, y_\mathrm{inh} \in \mathbb{Z}) \wedge (\mathrm{n} \in \mathbb{Z}) \end{array}\right\}$$

siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Gleichung#cite_note-1

Gleichungen und Ungleichungen für Zahlen

MERKE: In algebraischen Gleichungen tritt nur eine Variable in verschiedenen natürlichen Potenzen als Polynom auf. Die Konstanten vor den Potenzen der Variable heißen Koeffizienten $\mathrm{a_n}$. Die Zahl der höchsten Potenz ist gleich dem Grad der Gleichung.

$$\mathrm{a_n}x^{\mathrm{n}} + \cdots + \mathrm{a_2}x^2 + \mathrm{a_1}x^1 + \mathrm{a_0}x^0 = 0$$

$\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ $\quad$ $\mathrm{a_n} \in \mathbb{R}^*$

MERKE: Quadratische Gleichungen der Form $x^2 + \mathrm{p}x + \mathrm{q} = 0$, werden wie folgt gelöst:

$$x_{1,2} = -\frac{\mathrm{p}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathrm{p}}{2}\right)^2 - \mathrm{q}}$$

Beispiel

$$14x^2 + 15x - 10 = 0$$

Gleichung 2. Grades

$$x^2 + \underbrace{\frac{15}{14}}_{\mathrm{p}}x - \underbrace{\frac{10}{14}}_{\mathrm{q}} = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{\frac{15}{14}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{15}{14}}{2}\right)^2 + \frac{10}{14}}$$

$$x_{1,2} = -\frac{15}{28} \pm \sqrt{\frac{225}{784} + \frac{560}{784}}$$

$$x_1 = -\frac{15}{28} + \frac{\sqrt{785}}{28}, \quad x_2 = -\frac{15}{28} - \frac{\sqrt{785}}{28}$$

$$\mathrm{L} = \left\{-\frac{15}{28} + \frac{\sqrt{785}}{28}, -\frac{15}{28} - \frac{\sqrt{785}}{28}\right\}$$

siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Gleichung#cite_note-1

Gleichungen und Ungleichungen für Zahlen

MERKE: Eine Ungleichung macht eine Aussage über die Ungleichheit zweier in Relation stehender Terme T_1 und T_2. Eine wahre Aussage wird das durch das Größer- oder das Kleinerzeichen symbolisiert: $\mathrm{T}_1 > \mathrm{T}_2$ oder $\mathrm{T}_1 < \mathrm{T}_2$. T_1 steht für die linke Seite und T_2 für die rechte Seite der Ungleichung.

Folgende Ungleichungen sind mit Verwendung des Gleichheitszeichens möglich:		**Beispiele**	
$\mathrm{T}_1 > \mathrm{T}_2$	größer als	$x > y$	
$\mathrm{T}_1 \geq \mathrm{T}_2$	größer gleich	$x \geq 14$	
$\mathrm{T}_1 < \mathrm{T}_2$	kleiner als	$14 < 15$	
$\mathrm{T}_1 \leq \mathrm{T}_2$	kleiner gleich	$14x^2 + x \leq 15^y$	
$\mathrm{T}_1 \neq \mathrm{T}_2$	ungleich	$10 + 4\mathrm{j} \neq 4 + 10\mathrm{j}$	$\mathrm{j}^2 = -1$

siehe: https://scienceblogs.de/astrodicticum-simplex/2016/06/20/der-walisische-wetzstein-des-wissens-und-das-gleichheitszeichen/

Gleichungen und Ungleichungen für Zahlen

Äquivalenzumformungen

Gleichung | **Ungleichung**

Seiten vertauschen

Gleichung:

$$3x + 12 = 6 \;\Leftrightarrow\; 6 = 3x + 12$$

(Relation bleibt erhalten)

Ungleichung:

$$3x + 12 < 6 \;\Leftrightarrow\; 6 > 3x + 12$$

(Relation umkehren)

gleiche Zahl addieren oder subtrahieren

Gleichung:

$$\begin{aligned} 3x + 12 &= 6 \qquad | -6 \\ 3x + 12 - 6 &= 6 - 6 \\ 3x + 6 &= 0 \end{aligned}$$

(Relation bleibt erhalten)

Ungleichung:

$$\begin{aligned} 3x + 12 &< 6 \qquad | -6 \\ 3x + 12 - 6 &< 6 - 6 \\ x + 6 &< 0 \end{aligned}$$

(Relation bleibt erhalten)

MERKE: Multiplikation und Division mit der Null, sowie Potenzieren mit geraden Exponenten oder Betragsbildung sind keine Äquivalenzumformungen!!!

siehe: https://www.mathebibel.de/aequivalenzumformungen

Gleichungen und Ungleichungen für Zahlen

Äquivalenzumformungen

Gleichung	Ungleichung
eine Zahl >0 multiplizieren oder dividieren	
$3x+6=0 \quad \|:3$	$3x+6>0 \quad \|:3$
$(3x+6):3=0:3$	$(3x+6):3>0:3$
$x+2=0$	$x+2>0$
(Relation bleibt erhalten)	(Relation bleibt erhalten)
eine Zahl <0 multiplizieren oder dividieren	
$3x+6=0 \quad \|:-3$	$3x+6>0 \quad \|:-3$
$(3x+6):(-3)=0:(-3)$	$(3x+6):(-3)<0:(-3)$
$x+2=0$	$-x-2<0$
(Relation bleibt erhalten)	(Relation umkehren)

MERKE: Multiplikation und Division mit der Null, sowie Potenzieren mit geraden Exponenten oder Betragsbildung sind keine Äquivalenzumformungen!!!

siehe: https://www.mathebibel.de/aequivalenzumformungen

Übungen
Gleichungen und Ungleichungen

Gleichungen und Ungleichungen

Welche Aussagen sind wahr $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R})$?

1. $6a - 6b = a - b$

2. $8 \cdot a \cdot b + (-a \cdot b) = 8$

3. $2(ab) = 4ab$

4. $a(b + c) = ab + ac$

5. $3 \cdot a + a \cdot 3 = 9a$

6. $b + (3b + 4b) = 8b$

7. $3a - a = 3$

8. $-(-a) = a$

9. $a + bc = (a + b) \cdot (a + c)$

10. $-(a - b) = b - a$

Gleichungen und Ungleichungen

Welche Aussagen sind wahr $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R})$?

1. $6a - 6b = a - b$ ❌ $= 6(a - b)$
2. $8 \cdot a \cdot b + (-a \cdot b) = 8$ ❌ $= 7 \cdot a \cdot b$
3. $2(ab) = 4ab$ ❌ $= 2ab$
4. $a(b + c) = ab + ac$ ✅
5. $3 \cdot a + a \cdot 3 = 9a$ ❌ $= 6a$
6. $b + (3b + 4b) = 8b$ ✅
7. $3a - a = 3$ ❌ $= 2a$
8. $-(-a) = a$ ✅
9. $a + bc = (a + b) \cdot (a + c)$ ❌ nicht zu vereinfachen
10. $-(a - b) = b - a$ ✅

Lerneinheit 1.7
Darstellung von Zahlen

$$\mathbf{1} + \mathbf{1} = ???$$

Stellenwertsystem

Dual-, Dezimal- Duodezimal- und Hexadezimalzahlen

Leitfrage

Wie kann man Zahlen darstellen?

Kurzbiografie auf spektrum.de

Adam Ries (1492 – 1559)
Vater des modernen Rechnens (bei uns ☺)

Stellenwertsystem

b-adisches Stellenwertsysteme

MERKE: b-adische Stellenwertsysteme mit der Basis $b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, basieren auf dem Bündelungsprinzip. Jede Ziffer z_m bis z_{-n} steht für eine Anzahl an Elementen, die mit der Potenz b^m bzw. b^{-n} der jeweiligen Stelle multipliziert wird. Negative Potenzen werden von den nichtnegativen Potenzen durch ein Komma getrennt.

MERKE: Die Basis wird durch einen Index als Dezimalzahl gekennzeichnet, z. B. AF_{16} oder 101010_2. Manchmal auch mit einer Abkürzung für das System, z. B. AF_{hex} oder 101010_B.

Vor dem Komma von rechts nach links | **Nach dem Komma von links nach rechts**

$$\mathbf{z_m \cdot b^m + \dots + z_2 \cdot b^2 + z_1 \cdot b^1 + z_0 \cdot b^0 \;,\; z_{-1} \cdot b^{-1} + z_{-2} \cdot b^{-2} + \dots + z_{-n} \cdot b^{-n}}$$

$$\mathrm{Zahl}_b = \pm \sum_{k=-n}^{m} z_k \cdot b^k \qquad b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \qquad z_k \in \{0, 1, \dots, b-1\} \qquad m \in \mathbb{N};\; n \in \mathbb{N}^*$$

MERKE: Im b-adischen System, können Ziffern z_k jeweils eine der Ziffern von 0 bis $b-1$ sein.

Achtung: In der amerikanischen Schreibweise und in vielen Programmiersprachen sind die Dezimalstellen durch einen Punkt getrennt. Beispiel: Deutschland: 1 060,58 = 1 060.58 :USA

siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Stellenwertsystem

Stellenwertsystem

Beispiel: Darstellung der natürlichen Zahlen im b-adischen Stellenwertsystem

Basen Zahlen	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Null	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	0	0
●	1	1	1	1	1	1	1	1	**1**	1	1
●●	10	2	2	2	2	2	2	2	**2**	2	2
●●●	11	10	3	3	3	3	3	3	**3**	3	3
●● ●●	100	11	10	4	4	4	4	4	**4**	4	4
●●●●●	101	12	11	10	5	5	5	5	**5**	5	5
●●● ●●●	110	20	12	11	10	6	6	6	**6**	6	6
●●●●●●●	111	21	13	12	11	10	7	7	**7**	7	7
●●●● ●●●●	1000	22	20	13	12	11	10	8	**8**	8	8
●●● ●●● ●●●	1001	100	21	14	13	12	11	10	**9**	9	9
●●●●● ●●●●●	1010	101	22	20	14	13	12	11	**10**	A	A
●●●●●●●●●●●	1011	102	23	21	15	14	13	12	**11**	10	B
●●●● ●●●● ●●●●	1100	110	30	22	20	15	14	13	**12**	11	10

Stellenwertsystem

Beispiel Dualzahl und Dezimalzahl im b-adischen Stellenwersystem

Bsp. 1 Dualzahl

$$101_2 \;,\; 11_2$$

$$100_2 + 00_2 + 1_2 \;,\; 0{,}1_2 + 0{,}01_2$$

$$1 \cdot 100_2 + 0 \cdot 10_2 + 1 \cdot 1_2 \;,\; 1 \cdot 0{,}1_2 + 1 \cdot 0{,}01_2$$

$$1 \cdot 10_2^{10} + 0 \cdot 10_2^{1} + 1 \cdot 10_2^{0} \;,\; 1 \cdot 10_2^{-1} + 1 \cdot 10_2^{-10}$$

$$1 \cdot 2_{10}^{2} + 0 \cdot 2_{10}^{1} + 1 \cdot 2_{10}^{0} \;,\; 1 \cdot 2_{10}^{-1} + 1 \cdot 2_{10}^{-2}$$

$$\mathbf{z_m \cdot b^m + \dots + z_2 \cdot b^2 + z_1 \cdot b^1 + z_0 \cdot b^0 \;,\; z_{-1} \cdot b^{-1} + z_{-2} \cdot b^{-2} + \dots + z_{-n} \cdot b^{-n}}$$

$$7 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 \;,\; 2 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2}$$

$$7 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 9 \cdot 1 \;,\; 2 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}01$$

$$700 + 90 + 9 \;,\; 0{,}2 + 0{,}06$$

Bsp. 2 Dezimalzahl

$$799 \;,\; 26$$

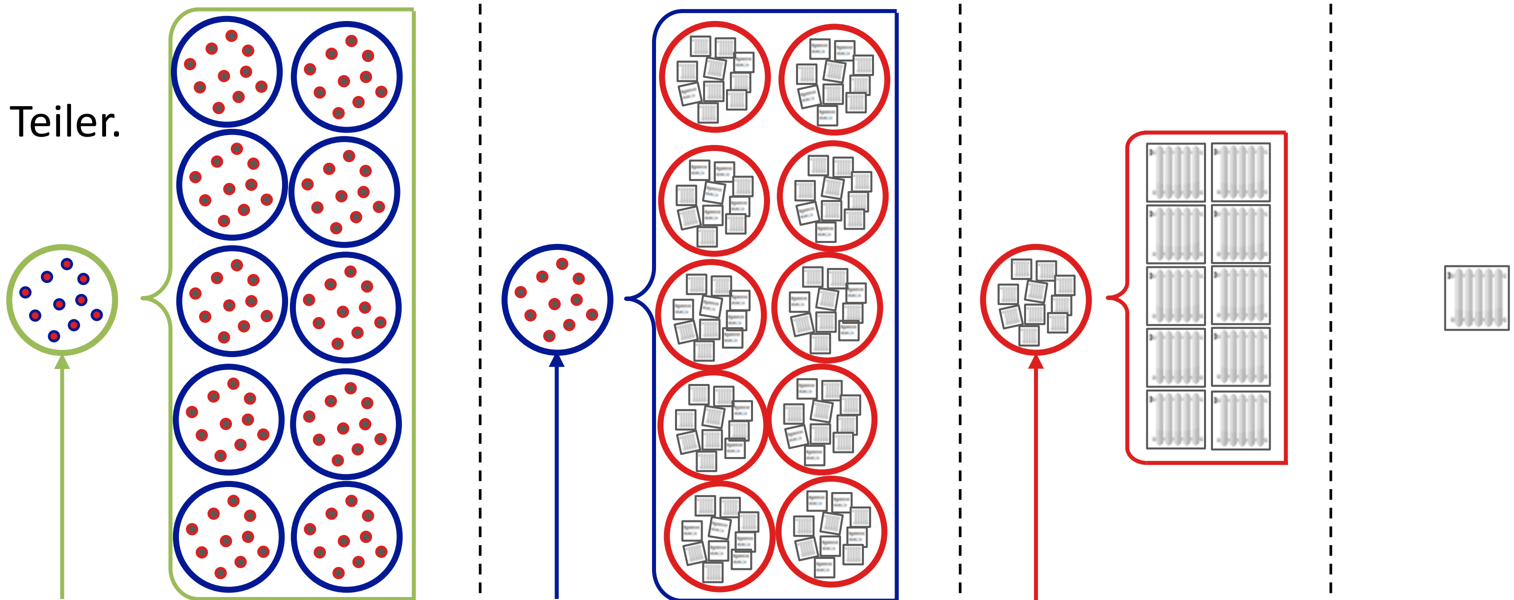
siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Stellenwertsystem

Stellenwertsystem

Dezimalsystem

$$z_m \cdot 10^m \quad + \quad \ldots \quad + \quad z_3 \cdot 10^3 \;+\; z_2 \cdot 10^2 \;+\; z_1 \cdot 10^1 \;+\; z_0 \cdot 10^0$$

Die 10 hat <u>vier</u> Teiler.



Bündelung von Hundertern

$1\,000 = 10^3$

Bündelung von Zehnern

$100 = 10^2$

Bündelung von Einsern

$10 = 10^1$

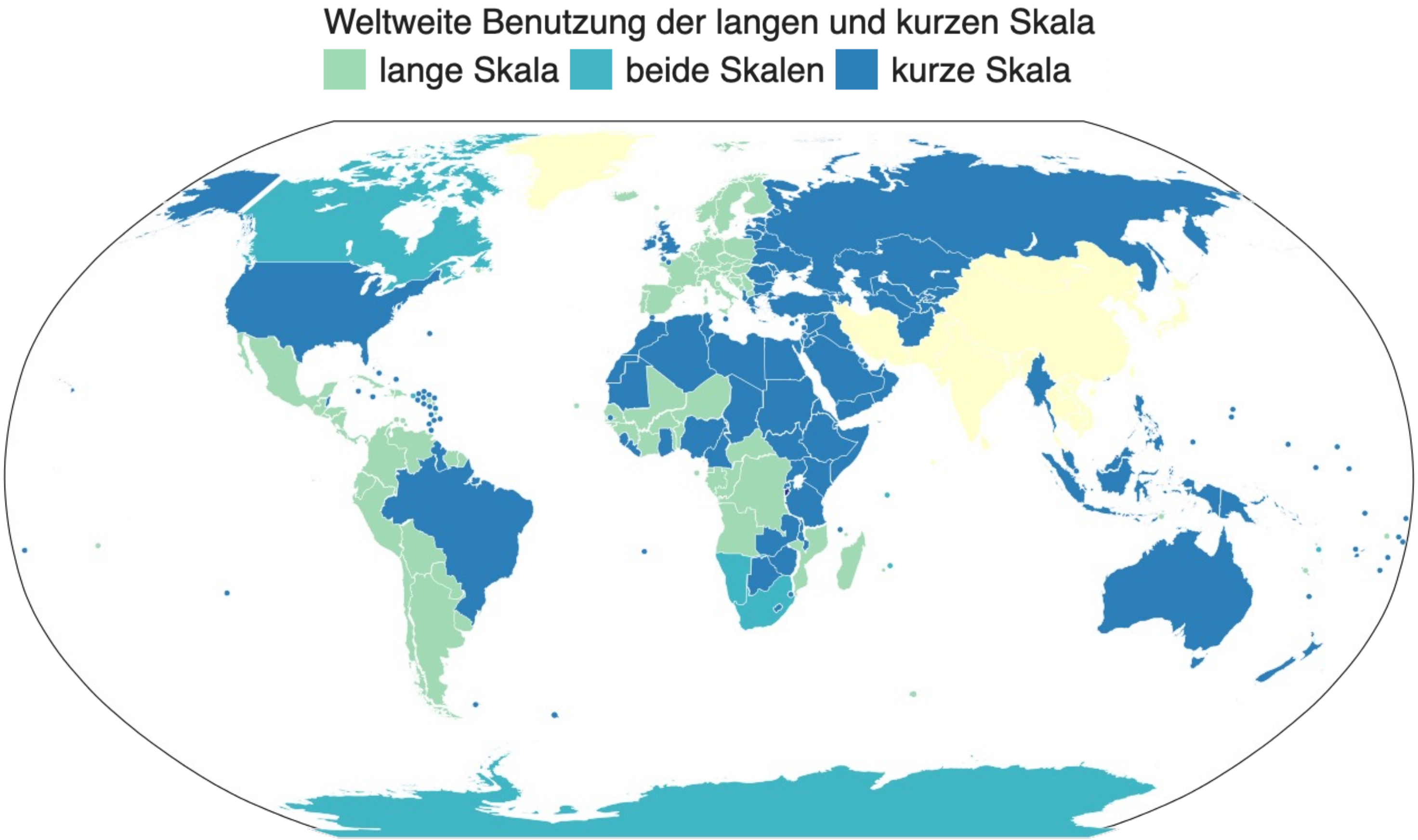
$1 = 10^0$

MERKE: Im <u>Dezimalsystem</u> (auch dekadisches System) mit der Basis 10, können die Ziffern z_k aus dem Ziffernvorrat 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 sein.

siehe: <u>https://de.wikipedia.org/wiki/Dezimalsystem</u>

Stellenwertsystem

Bezeichnungen im Dezimalsystem



MERKE: Zahlen werden im Dezimalsystem in verschiedenen Ländern unterschiedlich bezeichnet. Die kurze Skala verwendet Potenzen von 1 000 und die lange Skala Potenzen von 1 000 000. In Deutschland und dem Großteil der EU-Länder wird die lange Skala verwendet.

siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Lange_und_kurze_Skala

Stellenwertsystem

Bezeichnungen großer Zahlen im Dezimalsystem

SI-Präfixe zum Merken!

Kurze Skala 10^3-er Schritte		lange Skala 10^6-er Schritte		Intern. Einheitensystem		
Name	**Potenz**	**Name**	**Potenz**	**Potenz**	**SI Vorsatz**	
Eins	$\mathbf{1\,000^0}$	Eins	$\mathbf{1\,000\,000^0}$	$\mathbf{10^0}$	**-**	**-**
Zehn	$1\,000^{1/3}$	Zehn	$1\,000\,000^{1/6}$	10^1	Deka	da
Hundert	$1\,000^{2/3}$	Hundert	$1\,000\,000^{1/3}$	10^2	Hekto	h
Tausend (milia)	$\mathbf{1\,000^1}$	Tausend (milia)	$1\,000\,000^{1/2}$	10^3	Kilo	k
Million	$\mathbf{1\,000^2}$	Million	$\mathbf{1\,000\,000^1}$	$\mathbf{10^6}$	**Mega**	**M**
Billion	$\mathbf{1\,000^3}$	Milli**arde**	$1\,000\,000^{3/2}$	10^9	Giga	G
Trillion	$\mathbf{1\,000^4}$	Billion	$\mathbf{1\,000\,000^2}$	$\mathbf{10^{12}}$	**Tera**	**T**
Quadrillion	$\mathbf{1\,000^5}$	Billi**arde**	$1\,000\,000^{5/2}$	10^{15}	Peta	P
Quintillion	$\mathbf{1\,000^6}$	Trillion	$\mathbf{1\,000\,000^3}$	$\mathbf{10^{18}}$	**Exa**	**E**
Sextillion	$\mathbf{1\,000^7}$	Trilli**arde**	$1\,000\,000^{7/2}$	10^{21}	Zetta	Z
Septillion	$\mathbf{1\,000^8}$	Quadrillion	$\mathbf{1\,000\,000^4}$	$\mathbf{10^{24}}$	**Yotta**	**Y**

siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Lange_und_kurze_Skala https://de.wikipedia.org/wiki/Vorsätze_für_Maßeinheiten

Stellenwertsystem

Bezeichnungen kleiner Zahlen im Dezimalsystem

SI-Präfixe zum Merken!

Kurze Skala 10^{-3}-er Schritte		lange Skala 10^{-6}-er Schritte		Intern. Einheitensystem		
Name	**Potenz**	**Name**	**Potenz**	**Potenz**	**SI Vorsatz**	
Eins	$\mathbf{1\,000^0}$	Eins	$\mathbf{1\,000\,000^0}$	$\mathbf{10^0}$	-	-
Zehn**tel**	$1\,000^{-1/3}$	Zehn**tel**	$1\,000\,000^{-1/6}$	10^{-1}	Dezi	d
Hundert**stel**	$1\,000^{-2/3}$	Hundert**stel**	$1\,000\,000^{-1/3}$	10^{-2}	Zenti	c
Tausend**stel**	$\mathbf{1\,000^{-1}}$	Tausend**stel**	$1\,000\,000^{-1/2}$	10^{-3}	Milli	m
Million**stel**	$\mathbf{1\,000^{-2}}$	Million**stel**	$\mathbf{1\,000\,000^{-1}}$	$\mathbf{10^{-6}}$	**Mikro**	μ
Billion**stel**	$\mathbf{1\,000^{-3}}$	Milliarde**stel**	$1\,000\,000^{-3/2}$	10^{-9}	Nano	n
Trillion**stel**	$\mathbf{1\,000^{-4}}$	Billion**stel**	$\mathbf{1\,000\,000^{-2}}$	$\mathbf{10^{-12}}$	**Piko**	**p**
Quadrillion**stel**	$\mathbf{1\,000^{-5}}$	Billiarde**stel**	$1\,000\,000^{-5/2}$	10^{-15}	Femto	f
Quintillion**stel**	$\mathbf{1\,000^{-6}}$	Trillion**stel**	$\mathbf{1\,000\,000^{-3}}$	$\mathbf{10^{-18}}$	**Atto**	**a**
Sextillion**stel**	$\mathbf{1\,000^{-7}}$	Trilliarde**stel**	$1\,000\,000^{-7/2}$	10^{-21}	Zepto	z
Septillion**stel**	$\mathbf{1\,000^{-8}}$	Quadrillion**stel**	$\mathbf{1\,000\,000^{-4}}$	$\mathbf{10^{-24}}$	**Yokto**	**y**

siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Lange_und_kurze_Skala https://de.wikipedia.org/wiki/Vorsätze_für_Maßeinheiten

Extrafutter: große Zahlen in der Natur

Größe des kleinsten Volumens (Mikrokosmos)

Die Ausdehnung des sichtbaren Universums $r_U \approx 46 \cdot 10^9\, l_y \approx 46 \cdot 10^9 \cdot 9{,}5 \cdot 10^{15}\mathrm{m}$

$$r_U \approx 440 \cdot 10^{9+15}\ \mathrm{m} = 4{,}4 \cdot 10^{26}\mathrm{m}$$

Das Volumen des sichtbaren Universums ist $V_U = \frac{4}{3}\pi \cdot r_U^3 \approx \frac{4}{3}\pi \cdot (4{,}4 \cdot 10^{26}\ \mathrm{m})^3$

$$V_U \approx 360 \cdot 10^{78}\mathrm{m}^3 \approx 4 \cdot 10^{80}\mathrm{m}^3$$

Größe des Universums (Makrokosmos)

Die kleinste denkbare Länge ist die Plancklänge $l_P \approx 1{,}6 \cdot 10^{-35}\mathrm{m}$ $\left(l_P = \sqrt{\frac{h \cdot G}{2\pi \cdot c^3}}\right)$

Das kleinste denkbare Volumen ist somit $V_P = l_P^3 \approx (1{,}6 \cdot 10^{-35}\mathrm{m})^3 \approx 4 \cdot 10^{-105}\mathrm{m}^3$

Gesamtheit der Volumeneinheiten im Universum

$$\frac{V_U}{V_P} \approx \frac{4 \cdot 10^{80}\mathrm{m}^3}{4 \cdot 10^{-105}\mathrm{m}^3} = 10^{80} \cdot 10^{105} = \underline{\underline{10^{185}}}$$

MERKE: Die größte (momentan) denkbare Anzahl an Volumeneinheiten ist somit ca. 10^{185}.
Das sind hundert (10^2) Trigintillarden $(1\,000\,000^{30} = 10^{183})$.

siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Zahlennamen#Nomenklatur_für_Zahlen_ab_1.000.000 siehe: Die größten Zahlen der Natur (Vortrag Rudolf Taschner auf YouTube)

Stellenwertsystem

Dualsystem

Die 2 hat zwei Teiler.

$$\text{Zahl}_2 = \pm \sum_{k=-n}^{m} z_k \cdot 2^k \qquad z_k \in \{0, 1\}$$

MERKE: Im Dualsystem (auch dyadisches System) mit der Basis 2, können die Ziffern z_k aus dem Ziffernvorrat 0 und 1 sein.

MERKE: Von Computern wird auf Maschinenebene das Dualsystem (Binärsystem) verwendet. Da es nur zwei Ziffern benötigt, können die Ziffern durch die Schaltzustände ein und aus leicht repräsentiert werden.

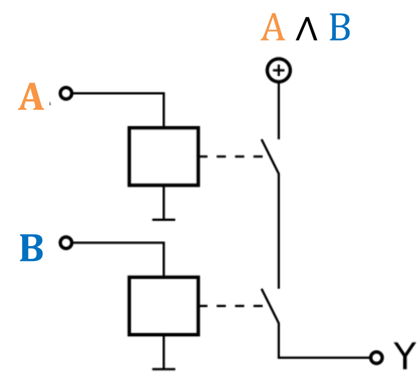
Schreibweise

$A \wedge B$

Wahrheitstabelle

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Beispiel Schaltungstechnik



siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Dualsystem

Stellenwertsystem

Hexadezimalsystem

Die 16 hat fünf Teiler. $\mathrm{Zahl}_{16} = \pm \sum_{k=-n}^{m} z_k \cdot 16^k$ $z_k \in \{0, 1, \dots, F\}$

MERKE: Im Hexadezimalsystem (auch hexadekadisch) mit der Basis 16 (von gr. hexa sechs), können die Ziffern z_k aus dem Ziffernvorrat 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ,9, A, B, C, D, E und F sein.

MERKE: Das Dual- und das Oktalsystem können sehr einfach in das das Hexadezimalsystem übertragen werden, da $8 = 2^3$ und $16 = 2^4$. Zwei Hexziffern bilden ein Byte (8 bit) , damit können bis zu $16 \cdot 16 = 256$ Zeichen codiert werden.

Beispiel
Der ASCII Code besteht aus 128 Zeichen (7 bit) und setzt sich aus der senkrechten und der waagerechten Hexzahl zusammen.

Code	…0	…1	…2	…3	…4	…5	…6	…7	…8	…9	…A	…B	…C	…D	…E	…F
0…	NUL	SOH	STX	ETX	EOT	ENQ	ACK	BEL	BS	HT	LF	VT	FF	CR	SO	SI
1…	DLE	DC1	DC2	DC3	DC4	NAK	SYN	ETB	CAN	EM	SUB	ESC	FS	GS	RS	US
2…	SP	!	"	#	$	%	&	'	(	)	*	+	,	-	.	/
3…	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	:	;	<	=	>	?
4…	@	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
5…	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	[	\	]	^	_
6…	`	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o
7…	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	{	|	}	~	DEL

siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Hexadezimalsystem https://de.wikipedia.org/wiki/American_Standard_Code_for_Information_Interchange

Stellenwertsystem

hochzusammengesetzte Zahlen (HCN)

MERKE: Eine hochzusammengesetzte Zahl (engl. Highly Composite Number HCN) ist eine positive ganze Zahl, die mehr Teiler besitzt als jede kleinere positive ganze Zahl.

Anzahl der Teiler der ersten 24 Zahlen

Zahl	**1**	**2**	3	**4**	5	**6**	7	8	9	10	11	**12**	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	**24**
Teilerzahl	**1**	**2**	2	**3**	2	**4**	2	4	3	4	2	**6**	2	4	4	5	2	6	2	6	4	4	2	**8**

Liste der ersten 15 hochzusammengesetzten Zahlen

HCN	1	2	4	6	**12**	24	36	48	**60**	120	180	240	360	720	840
Teilerzahl	1	2	3	4	**6**	8	9	10	**12**	16	18	20	24	30	32

Beispiele

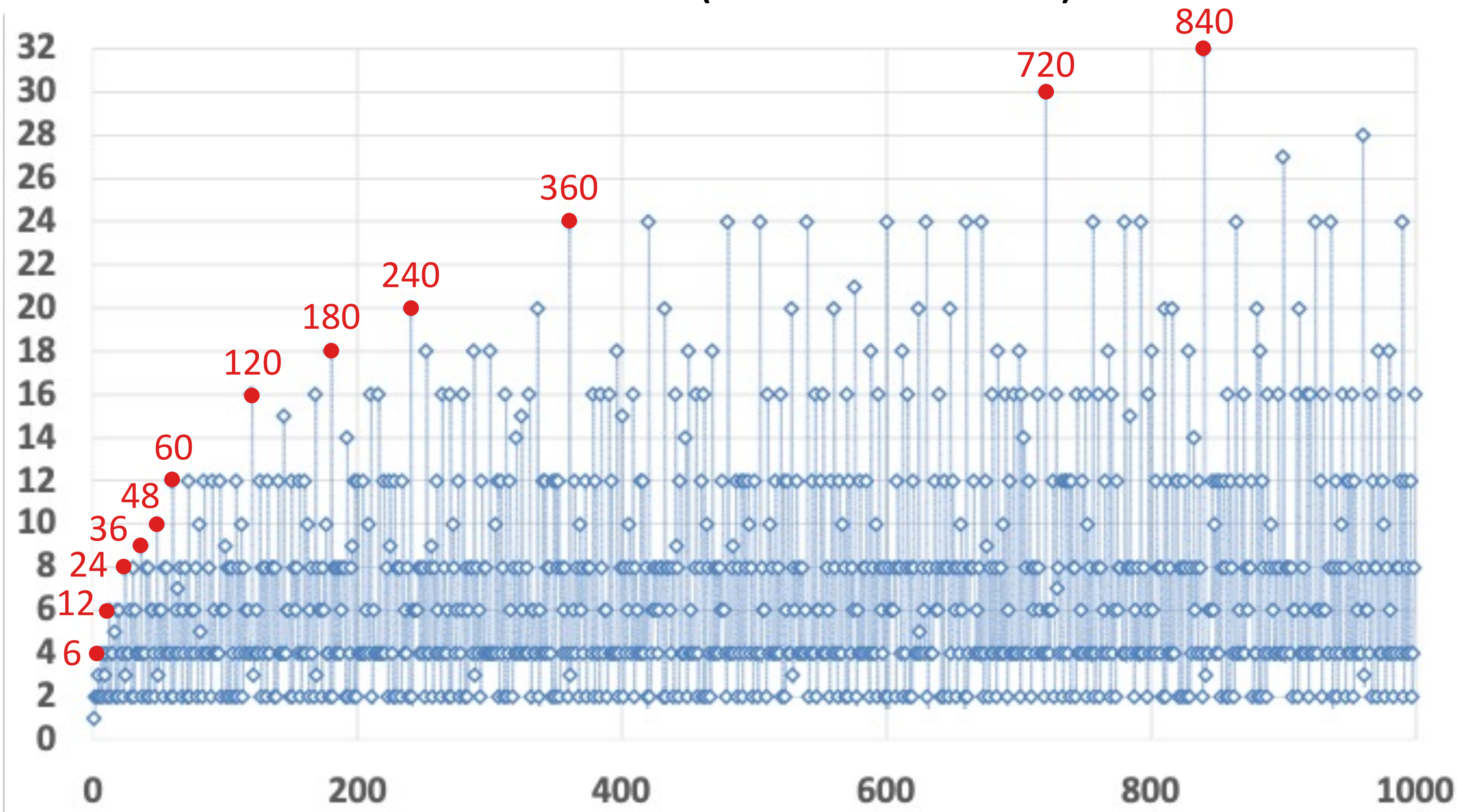
12 hat folgende sechs Teiler: 1, 2, 3, 4, 6 und 12
60 hat folgende zwölf Teiler: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 und 60

MERKE: Hochzusammengesetzte Zahlen eigenen sich besonders als Basis für Stellenwert-systeme mit Anwendungen, die eine hohe Teilbarkeit fordern, z.B. beim Kopfrechnen.

siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Hochzusammengesetzte_Zahl

Stellenwertsystem

Anzahl der Teiler der Zahlen von 1 bis 1000 (rote Zahlen sind HCN)



MERKE: Hochzusammengesetzte Zahlen eigenen sich besonders als Basis für Stellenwert-systeme mit Anwendungen, die eine hohe Teilbarkeit fordern, z.B. beim Kopfrechnen.

siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Hochzusammengesetzte_Zahl

Stellenwertsystem

Duodezimalsystem (HCN)

Die 12 hat sechs Teiler $\mathrm{Zahl}_{12} = \pm \sum_{k=-n}^{m} z_k \cdot 12^k$ $z_k \in \{0, 1, \dots, B\}$

MERKE: Im Duodezimalsystem (dodekadisch) mit der Basis 12 (von lat. duo zwei), können die Ziffern z_k aus dem Ziffernvorrat 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 , 9, A und B sein.

MERKE: Das Duodezimalsystem findet sich in diversen Zählmaßen wieder:

- $1 \text{ Dutzend} = 12$
- $1 \text{ Gros} = 1 \text{ Dutzend} \cdot 1 \text{ Dutzend} = 144$

oder in Maßrelationen

- $1 \text{ inch} = 12 \text{ lines}$
- $1 \text{ yard} = 12 \text{ inches}$
- Unze aus *lat. unzia* Zwölftel

oder in der Zeiteinteilung

- $1 \text{ Tag} = 1\text{d} = 2 \cdot 12\text{h}$
- $1 \text{ Jahr} = 1\text{a} = 12 \text{ Monate}$

siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Duodezimalsystem

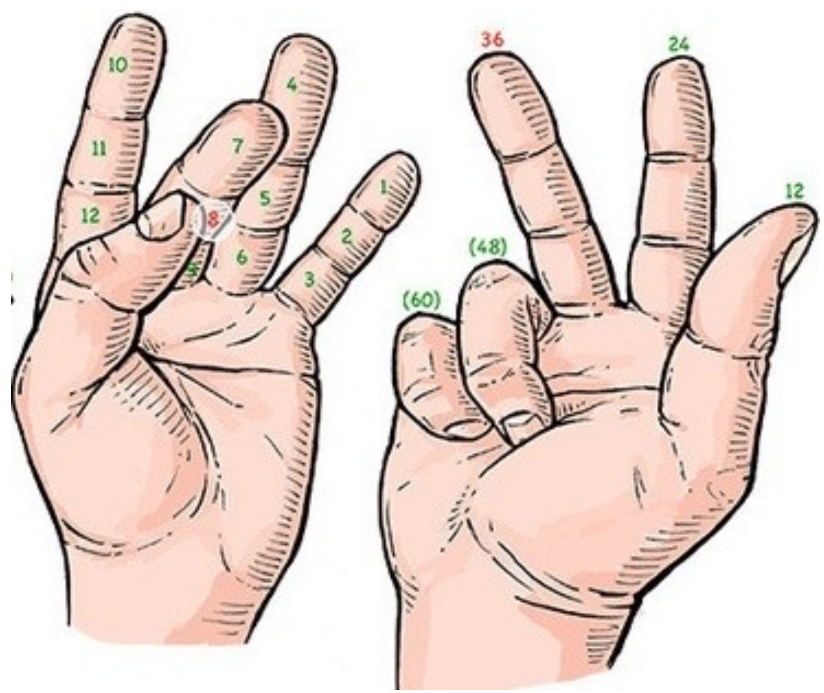
Stellenwertsystem

Duodezimalsystem (HCN)

Die 12 hat <u>sechs</u> Teiler $\mathrm{Zahl}_{12} = \pm \sum_{k=-n}^{m} z_k \cdot 12^k$ $z_k \in \{0, 1, \ldots, B\}$

MERKE: Im <u>Duodezimalsystem</u> (dodekadisch) mit der Basis 12 (von lat. duo zwei), können die Ziffern z_k aus dem Ziffernvorrat 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 , 9, A und B sein.

MERKE: Das Zählen bis sechzig ist mit unseren Händen sehr einfach möglich:



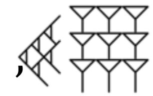
siehe: <u>https://de.wikipedia.org/wiki/Duodezimalsystem</u>

Stellenwertsystem

Sexagesimalsystem (HCN)

Die 60 hat zwölf Teiler

$$\mathrm{Zahl}_{60} = \pm \sum_{k=-n}^{m} z_k \cdot 60^k$$

$z_k \in \{ 0,$  ,  , … ,  $\}$

MERKE: Im Sexagesimalsystem mit der Basis 60 (von lat. sexagesimus der Sechsigste), können die Ziffern z_k aus dem Ziffernvorrat 0, bis 59 sein.

MERKE: Das Sexagesimalsystem wurde in Mesopotamien verwendet und findet sich heute noch in der Zeiteinteilung wieder:

- 1 Stunde = 60 Minuten = 60 min
- 1 Minute = 60 Sekunden = 60 s
- Tertien werden nicht mehr verwendet

die 12 Teiler von 60

Stellenwertsystem

Sexagesimalsystem (HCN)

Die 60 hat zwölf Teiler $\quad \text{Zahl}_{60} = \pm \sum_{k=-n}^{m} z_k \cdot 60^k \qquad z_k \in \{0,$ 𒁹 , 𒈫 , … , $\}$

MERKE: Im Sexagesimalsystem mit der Basis 60 (von lat. sexagesimus der Sechsigste), können die Ziffern z_k aus dem Ziffernvorrat 0, bis 59 sein.

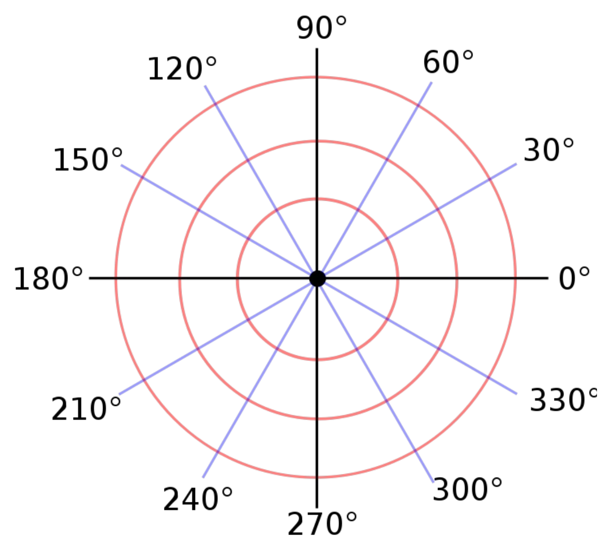
MERKE: Das Sexagesimalsystem wird oft noch bei der Kreiseinteilung verwendet:

- $1 \text{ Vollwinkel} = 360° = 6 \cdot 60°$
- $1° = 60 \text{ (Winkel)Minuten} = 60'$
- $1' = 60 \text{ (Winkel)Sekunden} = 60''$
- $1'' = 60 \text{ (Winkel)Tertien} = 60'''$

  z.B. 52°27'26.6"N 13°34'05.2"E

Achtung: später lernen wir die bessere Einteilung in Radiant kennen ☺.

360 hat 24 Teiler, ein Kreis kann somit diese ganzzahlige Aufteilungen in Grad haben:

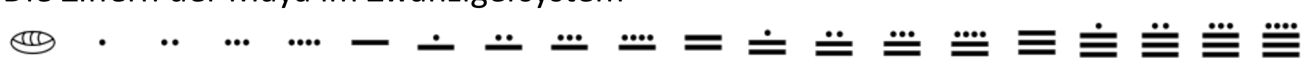


$1 \cdot 360°$	$360 \cdot 1°$
$2 \cdot 180°$	$180 \cdot 2°$
$3 \cdot 120°$	$120 \cdot 3°$
$4 \cdot 90°$	$90 \cdot 4°$
$5 \cdot 72°$	$72 \cdot 5°$
$6 \cdot 60°$	$60 \cdot 6°$
$8 \cdot 45°$	$45 \cdot 8°$
$9 \cdot 40°$	$40 \cdot 9°$
$10 \cdot 36°$	$36 \cdot 10°$
$12 \cdot 30°$	$30 \cdot 12°$
$15 \cdot 24°$	$24 \cdot 15°$
$18 \cdot 20°$	$20 \cdot 18°$

siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Sexagesimalsystem

Stellenwertsystem

- im Alltag verwendet
- in der Informatik verwendet
- früher verwendet (teilweise auch heute noch)

	Basis	Ziffern
Unär	1	I
Dual	**2**	**0 1**
Ternär	3	0 1 2
Quarternär	4	0 1 2 3
Quinär	5	0 1 2 3 4
Senär	6	0 1 2 3 4 5
	7	0 1 2 3 4 5 6
Oktal	**8**	**0 1 2 3 4 5 6 7**
	9	0 1 2 3 4 5 6 7 8
Dezimal	**10**	**0 1 2 3 4 5 6 7 8 9**
	11	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A
Duodezimal	12	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B
	13	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C
	14	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D
	15	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E
Hexadezimal	**16**	**0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F**
...		Die Ziffern der Maya im Zwanzigersystem
Vigesimal	20	
...		Die ersten zwanzig Ziffern der Babylonier im Sechzigersystem
Sexagesimal	60	0  usw.

Die Null war den Babyloniern noch nicht bekannt. Sie benutzten eine Leerstelle.

$$\text{Zahl}_b = \pm \sum_k \text{Ziffer}_k \cdot \text{Basis}^k$$

Extrafutter: beliebige Basen im Stellenwertsystem

Basis aus den	**Beispiele**	
allgemein	$\text{Zahl}_b = \pm \sum_{k=-n}^{m} z_k \cdot b^k$	$z_k \in \{\text{sinnvolle Wahl}\}$
natürliche Zahlen	$\text{Zahl}_2 = \pm \sum_{k=-n}^{m} z_k \cdot 2^k$	$z_k \in \{0, 1\}$
negative Zahlen	$\text{Zahl}_{-2} = \pm \sum_{k=-n}^{m} z_k \cdot (-2)^k$	$z_k \in \{0, 1\}$
irrationale Zahlen	$\text{Zahl}_{\sqrt{2}} = \pm \sum_{k=-n}^{m} z_k \cdot (\sqrt{2})^k$	$z_k \in \{0, 1\}$
komplexe Zahlen	$\text{Zahl}_{(2+i)} = \pm \sum_{k=-n}^{m} z_k \cdot (2+i)^k$	$z_k \in \{0, 1\}$

MERKE: Basis können auch negative, rationale, irrationale oder komplexe Zahlen sein. Die Anzahl der Ziffern sollte sinnvoll gewählt werden, z. B. der höchsten auftretenden Zahl entsprechen. Damit können Vielfache und Potenzen von diesen Zahlen einfach dargestellt werden.

siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Hyper-Operator

Extrafutter: lateinische und griechische Vorsilben

Vorsilben von Zahlwörtern

lateinische Vorsilben	
Zahl	**Präfix**
1	prim...
2	sekund...
3	tert...
4	quart...
5	quint...
6	sext...
7	sept...
8	okt...
9	non...
10	dezi...
100	cent...
1 000	mil...

griechische Vorsilben	
Zahl	**Präfix**
1	mono...
2	di...
3	tri...
4	tetra...
5	penta...
6	hexa...
7	hepta...
8	okta...
9	nona...
10	deka...
100	heka...
1 000	chilio... (kilo)

siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Lateinische_Zahlwörter https://de.wikipedia.org/wiki/Griechische_Zahlw%C3%B6rter

Übungen Stellenwertsystem

Übung Stellenwertsystem I

Rechnen Sie die Zahl 101010_2 ins Dezimalsystem um.

2^{11}	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

Rechnen Sie die Zahl 42_{10} ins Dualsystem um.

Übung Stellenwertsystem I

Rechnen Sie die Zahl 101010_2 ins Dezimalsystem um.

Lösung: Jede Stelle der Dualzahl wird mit der entsprechenden Zweierpotenz multipliziert und die Ergebnisse werden addiert.

2^{11}	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1

← ab hier können gedachte Nullen stehen

0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0

$1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = \underline{42}_{10}$

Rechnen Sie die Zahl 42_{10} ins Dualsystem um.

Lösung: Die Dezimalzahl wird so lange durch die Basis 2 dividiert, bis das Ergebnis 0 ist.
Die Reste der Divisionen ergeben die Ziffern der Dualzahl.

für alle Folgenden Divisionen gilt:

$0 : 2 = 0$	$1 : 2 = 0$	$2 : 2 = 1$	$5 : 2 = 2$	$10 : 2 = 5$	$21 : 2 = 10$	$42 : 2 = 21$
Rest: **0**	Rest: 1	Rest: 0	Rest: 1	Rest: 0	Rest: 1	Rest: 0

$42_{10} = \underline{101010}_2$

Übung Stellenwertsystem II

Rechnen Sie vom Hexadezimalsystem ins Dualsystem um und umgekehrt.

$2A_{16}$ in $??????_2$

1101111_2 in $??_{16}$

Hex	Dual
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

Hex	Dual
8	
9	
A	
B	
C	
D	
E	
F	

Übung Stellenwertsystem II

Rechnen Sie vom Hexadezimalsystem ins Dualsystem um und umgekehrt.

Unterteilung der Dualzahl von rechts nach links in 4er-Päckchen, und Umwandlung jedes Päckchen nach nebenstehender Tabelle.

$2A_{16}$ in $??????_2$

$2A_{16} = \underline{0010\ \ 1010_2}$

1101111_2 in $??_{16}$

$0110\ \ 1111_2 = \underline{6F_{16}}$

Hex	Dual
0	0000
1	0001
2	**0010**
3	0011
4	0100
5	0101
6	**0110**
7	0111

Hex	Dual
8	1000
9	1001
A	**1010**
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	**1111**

Lerneinheit 1.8
Intervalle

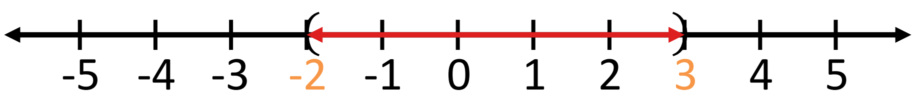
offene, geschlossene, halboffene, uneigentliche Intervalle
Schranken, Infimum, Supremum, Minimum, Maximum

Intervalle

offene Intervalle

$$x \in (a, b) = \{x \mid (x \in \mathbb{R}) \wedge (x_1 < x < x_2)\}$$

Beispiel



$$x \in (-2, 3) = \{x \mid (x \in \mathbb{R}) \wedge (-2 < x < 3)\}$$

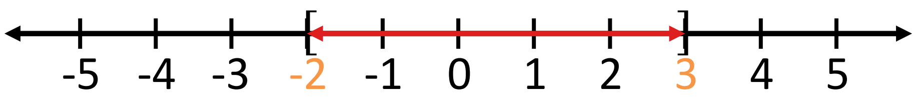
MERKE: Alle reellen Zahlen x, die zwischen zwei gegebenen reellen Zahlen $x_1 < x_2$ liegen, bilden ein Intervall. Wenn x_1 oder x_2 nicht eingeschlossen sind, handelt es sich um ein <u>offenes Intervall</u>.

Intervalle

geschlossene Intervalle

$$x \in [a, b] = \{x \mid (x \in \mathbb{R}) \wedge (x_1 \leq x \leq x_2)\}$$

Beispiel



$$x \in [-2, 3] = \{x \mid (x \in \mathbb{R}) \wedge (-2 \leq x \leq 3)\}$$

MERKE: Alle reellen x Zahlen, die zwischen zwei gegebenen reellen Zahlen $x_1 < x_2$ liegen, bilden ein Intervall. Wenn x_1 oder x_2 eingeschlossen sind, handelt es sich um ein <u>geschlossenes Intervall</u>.

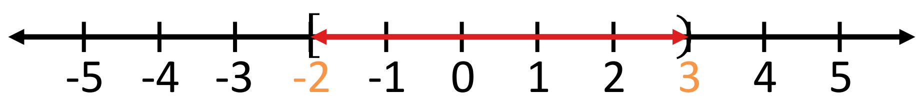
Intervalle

halboffene Intervalle

$$x \in [a, b) = \{x \mid (x \in \mathbb{R}) \wedge (x_1 \leq x < x_2)\}$$ rechtsoffen

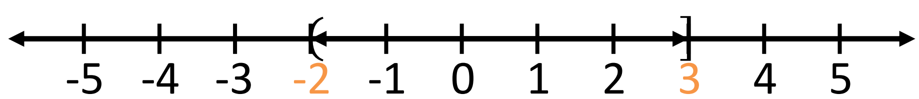
$$x \in (a, b] = \{x \mid (x \in \mathbb{R}) \wedge (x_1 < x \leq x_2)\}$$ linksoffen

Beispiele



rechtsoffen

$$x \in [-2, 3) = \{x \mid (x \in \mathbb{R}) \wedge (-2 \leq x < 3)\}$$



linksoffen

$$x \in (-2, 3] = \{x \mid (x \in \mathbb{R}) \wedge (-2 < x \leq 3)\}$$

MERKE: Alle reellen x Zahlen, die zwischen zwei gegebenen reellen Zahlen $x_1 < x_2$ liegen, bilden ein Intervall. Wenn nur eine Zahl x_1 oder x_2 eingeschlossen ist, handelt es sich um ein <u>halboffenes Intervall</u>.

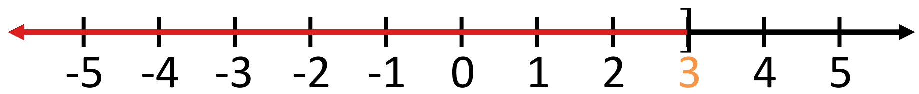
Intervalle

uneigentliche Intervalle

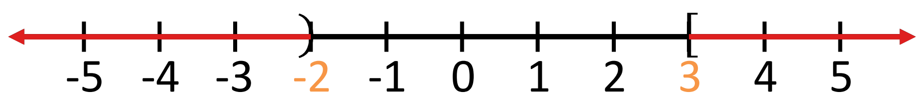
$$x \in (-\infty, \mathrm{x}_2] = \{x |\, (x \in \mathbb{R}) \wedge (-\infty < x \leq \mathrm{x}_2)\}$$

$$x \in [\mathrm{x}_1, \infty) = \{x |\, (x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathrm{x}_1 \leq x < \infty)\}$$

Beispiele



$$x \in (-\infty, 3] = \{x |\, (x \in \mathbb{R}) \wedge (-\infty < x \leq 3)\}$$



$$x \notin [-2, 3) = \{x |\, (x \in \mathbb{R}) \wedge (x < -2 \vee \ 3 \leq x)\}$$

MERKE: Wenn ein Intervall nur von einer Zahl x begrenzt wird, handelt es sich um ein <u>uneigentliches Intervall</u>. Da ∞ keine Zahl ist, gehört es in keinem Fall zu einem Intervall, das Intervall kann aber offen oder halboffen sein.

Intervalle

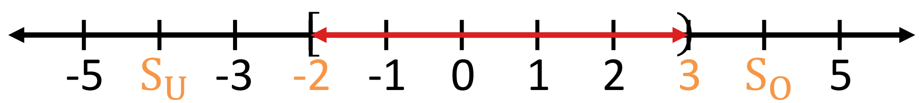
Beschränktheit (Schranken)

untere Schranke: $\exists S_U, \forall x \in M: x \geq S_U$

obere Schranke: $\exists S_O, \forall x \in M: x \leq S_O$

Beispiel

eine u. Schranke: -4 **eine o. Schranke:** 4



das Infimum: -2 **das Supremum:** 3

MERKE: Wenn mindestens eine reelle Zahl S_U existiert, zu der alle Zahlen x im Intervall größer sind, so heißt sie untere Schranke und das Intervall ist nach <u>unten beschränkt</u>. Die größte untere Schranke heißt Infimum.

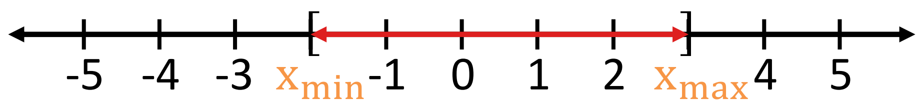
MERKE: Wenn mindestens eine reelle Zahl S_O existiert, zu der alle Zahlen x im Intervall kleiner sind, so heißt sie obere Schranke und das Intervall ist nach <u>oben beschränkt</u>. Die kleinste obere Schranke heißt Supremum.

Intervalle

Beschränktheit (Extremwerte)

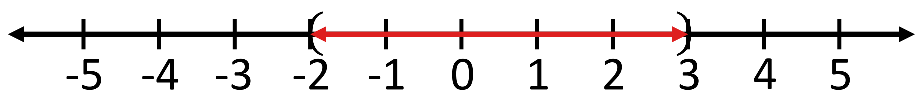
Minimum: $\exists \mathrm{x}_{\min} \in \mathrm{M}: \forall x \in \mathrm{M}: x \geq \mathrm{x}_{\min}$ **Maximum:** $\exists \mathrm{x}_{\max} \in \mathrm{M}: \forall x \in \mathrm{M}: x \leq \mathrm{x}_{\max}$

Beispiel 1



das Minimum: -2 **das Maximum:** 3

Beispiel 2



kein Minimum **kein Maximum**

MERKE: Wenn eine reelle Zahl $\mathrm{x}_{\min} \in \mathrm{M}$ existiert, zu der alle Zahlen x im Intervall größer sind, so heißt sie das <u>Minimum</u> des Intervalls. Für ein offenes Intervall existiert kein Minimum.

MERKE: Wenn eine reelle Zahl $\mathrm{x}_{\max} \in \mathrm{M}$ existiert, zu der alle Zahlen x im Intervall kleiner sind, so heißt sie das <u>Maximum</u> des Intervalls. Für ein offenes Intervall existiert kein Maximum.

Übungen
Intervalle

Übung Intervalle I

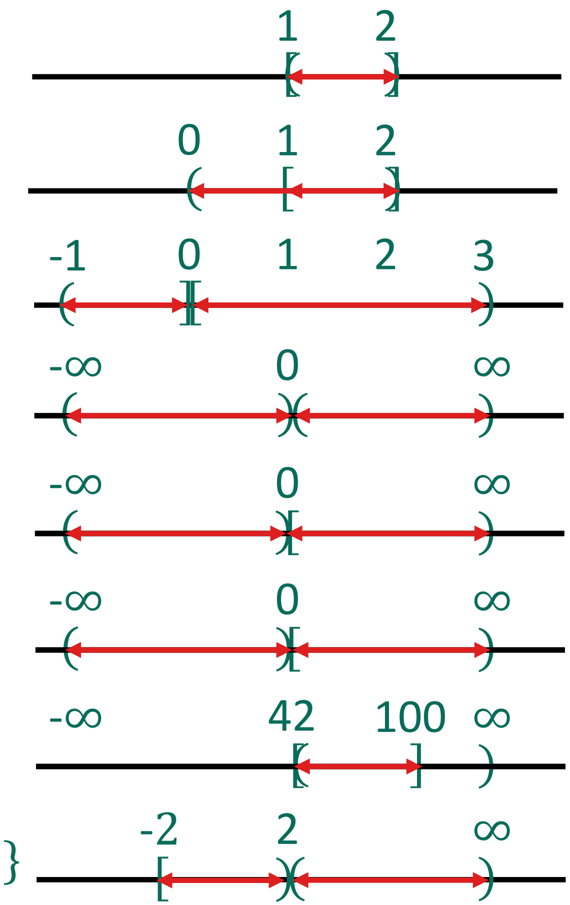
Welche Aussagen sind wahr?

1. $[1,2) \subseteq (1,2]$
2. $[1,2) \subseteq (0,2]$
3. $(-1,0]$ und $[0,3)$ sind disjunkt
4. $\mathbb{R}^+ \cap (-\infty,0) = \{0\}$
5. $[0,\infty) \cup (-\infty,0) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
6. $[0,\infty) \cup (-\infty,0) = \emptyset$
7. $[42,\infty) \cap (42,100] = [42,100]$
8. $[-2,2) \cup (2,\infty) = [-2,\infty)$

Übung Intervalle I

Welche Aussagen sind wahr?

1.	$[1,2) \subseteq (1,2]$	❌	$1 \notin (1,2]$
2.	$[1,2) \subseteq (0,2]$	✅	
3.	$(-1,0]$ und $[0,3)$ sind disjunkt	❌	$0 \in$ von beiden
4.	$\mathbb{R}^+ \cap (-\infty,0) = \{0\}$	❌	$\mathrm{L} = \emptyset$
5.	$[0,\infty) \cup (-\infty,0) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	❌	$0 \in [0,\infty)$
6.	$[0,\infty) \cup (-\infty,0) = \emptyset$	❌	$\mathrm{L} = \mathbb{R}$
7.	$[42,\infty) \cap (42,100] = [42,100]$	❌	$\mathrm{L} = (42,100]$
8.	$[-2,2) \cup (2,\infty) = [-2,\infty)$	❌	$\mathrm{L} = [-2,\infty) \setminus \{2\}$



Übung Intervalle II

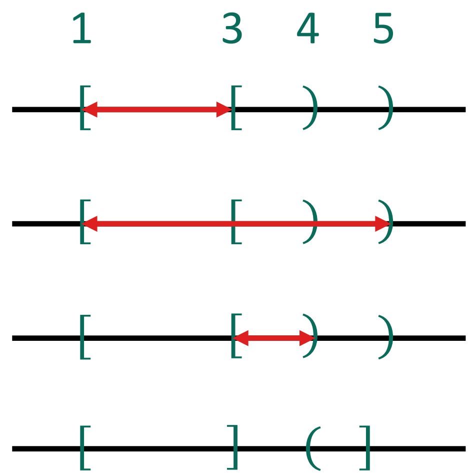
Geben Sie die Lösungsmengen an.

1. $[1,4) \setminus [3,5)$
2. $[1,4) \cup [3,5)$
3. $[1,4) \cap [3,5)$
4. $[1,3] \cap (4,5]$

Übung Intervalle II

Geben Sie die Lösungsmengen an.

1. $[1,4) \setminus [3,5)$ $\quad$ $\mathrm{L} = [1,3)$
2. $[1,4) \cup [3,5)$ $\quad$ $\mathrm{L} = [1,5)$
3. $[1,4) \cap [3,5)$ $\quad$ $\mathrm{L} = [3,4)$
4. $[1,3] \cap (4,5]$ $\quad$ $\mathrm{L} = \emptyset$



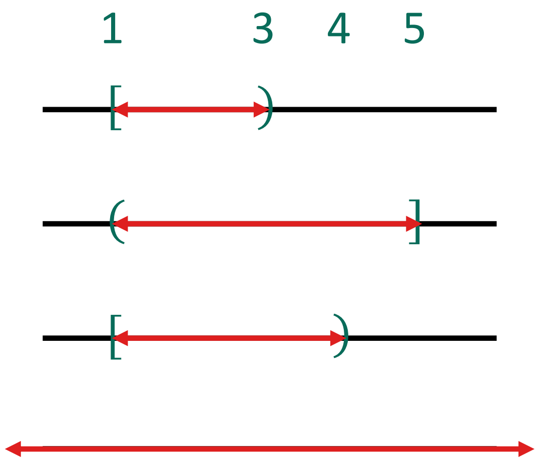
Übung Intervalle III

Bestimmen Sie das Infimum, das Minimum das Supremum und das Maximum der Intervalle

1. $[1, 3)$
2. $(1, 5]$
3. $(1, 4)$
4. $(-\infty, +\infty)$

Übung Intervalle III

Bestimmen Sie das Infimum, das Minimum das Supremum und das Maximum der Intervalle



1. $[1,3)$ $\quad S_U = 1, x_{min} = 1, S_O = 3\ , x_{max} =$ e.n.
2. $(1,5]$ $\quad S_U = 1, x_{min} =$ e.n., $S_O = 5\ , x_{max} = 5$
3. $(1,4)$ $\quad S_U = 1, x_{min} =$ e.n., $S_O = 4\ , x_{max} =$ e.n.
4. $(-\infty, +\infty)$ $\quad S_U, x_{min}, S_O$ und x_{max} existieren nicht

e.n. = existiert nicht

Lerneinheit 1.9
Koordinatensysteme

kartesische Koordinaten, Polarkoordinaten

Koordinatensysteme

Mengenprodukt

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	1	2	3	...
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, ...)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, ...)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, ...)
...	(..., 1)	(..., 2)	(..., 3)	(..., ...)

$\infty \cdot \infty$ Paare

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

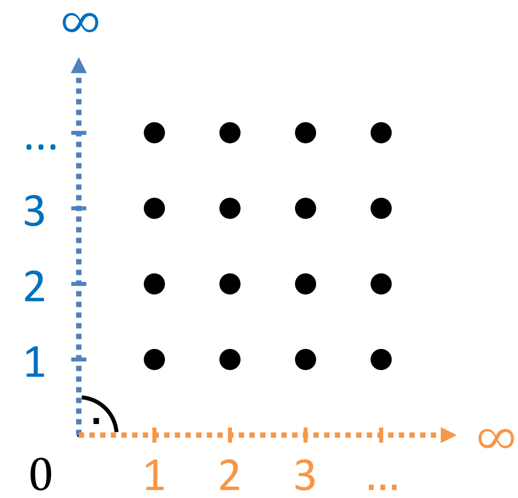
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(1, 1), (1, 2), \dots\} = \mathbb{N}^{\mathbf{2}}$

Darstellung

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$

$\infty \cdot \infty$ Punkte

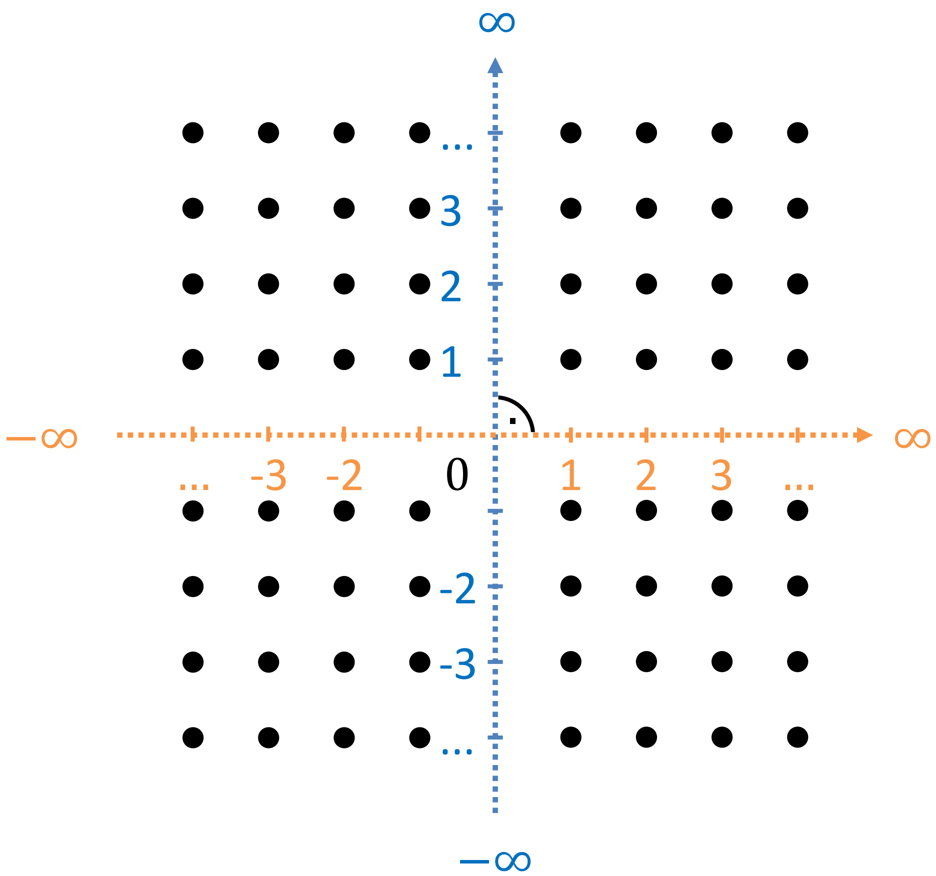


MERKE: Die geordneten Paare können als Punkte auf einer Fläche dargestellt werden.

Koordinatensysteme

Darstellung $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$

$\infty \cdot \infty$ Punkte

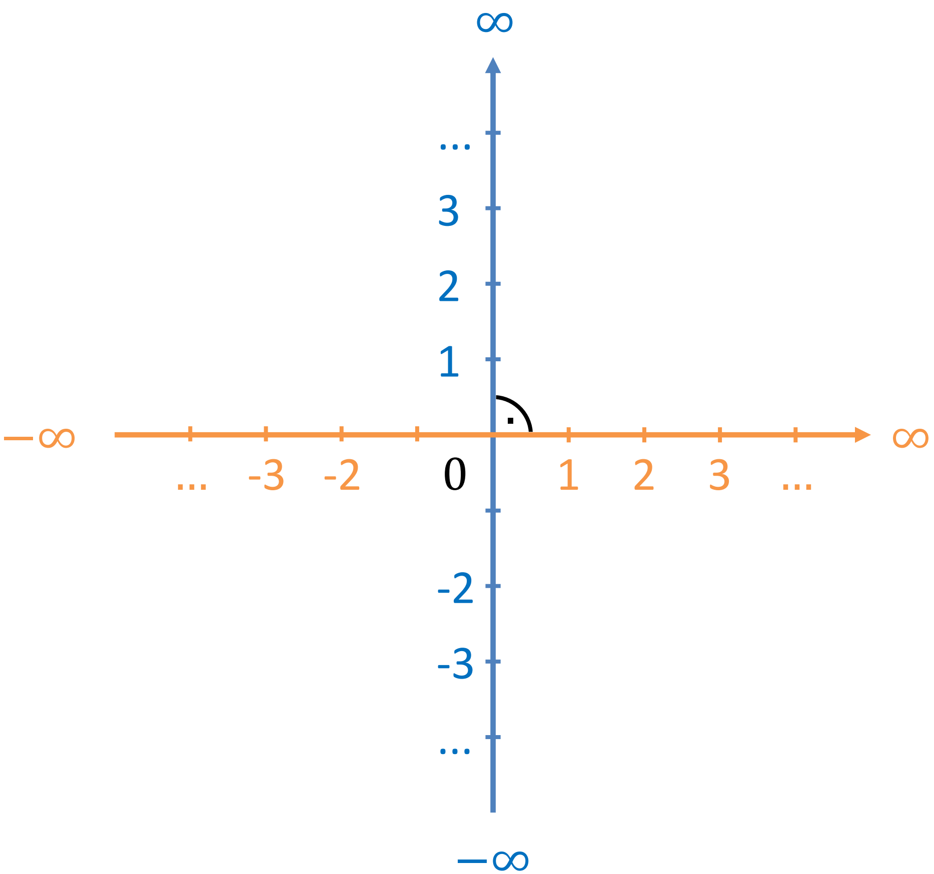


Koordinatensysteme

MERKE: Die Darstellung des Mengenproduktes $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wird als das <u>kartesische Koordinatensystem</u> der reellen Zahlen bezeichnet. Das wichtigste Merkmal ist, dass die Abszisse (x-Achse) und die Ordinate (y-Achse) senkrecht zueinander angeordnet sind. Die Punkte liegen unendlich dicht in der aufgespannten Ebene.

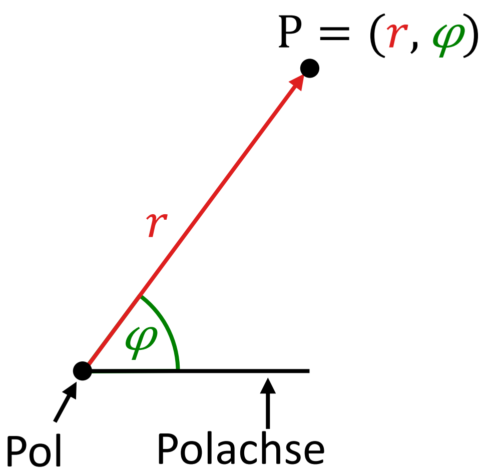
Darstellung $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

$\infty \cdot \infty$ Punkte



Koordinatensysteme

Polarkoordinaten



r ist der Abstand zum Pol

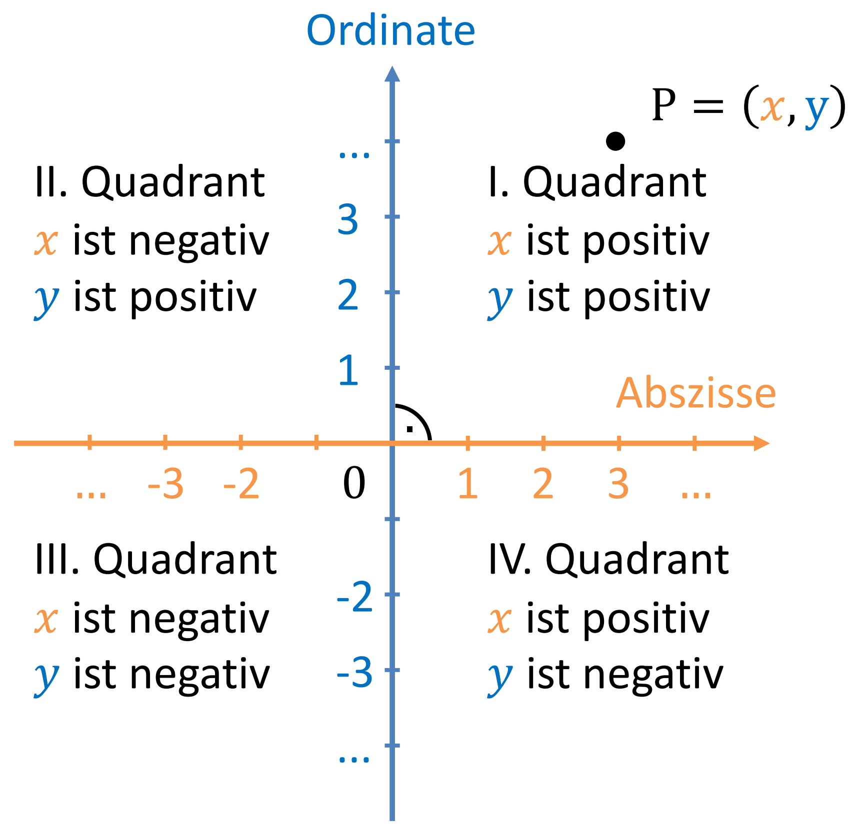
$r \in \mathbb{R}_0^+ \qquad r \geq 0$

φ ist der Winkel zur Polachse

$\varphi \in \mathbb{R}_0^+ \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Kartesische Koordinaten

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$



siehe auch: https://de.serlo.org/mathe/1517/das-zweidimensionale-kartesische-koordinatensystem
https://de.serlo.org/mathe/45643/polarkoordinaten

Koordinatensysteme

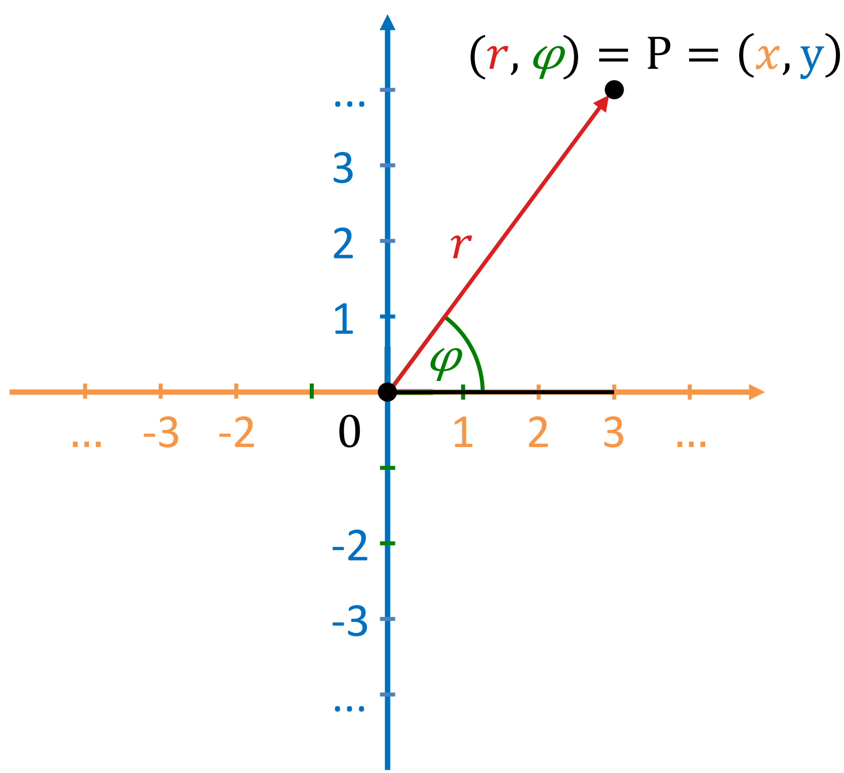
Umrechnung kartesisch in polar

Für alle (x, y) $\quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$

I. Quadrant $0 \leq \varphi < \frac{1}{2}\pi$	$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
x ist null y ist positiv	$\varphi = \frac{1}{2}\pi$
II. & III. Quadrant $\frac{1}{2}\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$	$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$
x ist null y ist negativ	$\varphi = \frac{3}{2}\pi$
IV. Quadrant $\frac{3}{2}\pi < \varphi < 2\pi$	$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi$

Umrechnung polar in kartesisch

$x = r \cdot \cos(\varphi) \qquad y = r \cdot \sin(\varphi)$



MERKE: In drei Dimensionen werden neben den kartesischen Koordinaten auch Zylinderkoordinaten oder Kugelkoordinaten verwendet.

siehe auch: https://de.serlo.org/mathe/1517/das-zweidimensionale-kartesische-koordinatensystem
https://de.serlo.org/mathe/45643/polarkoordinaten

Übungen Koordinatensysteme

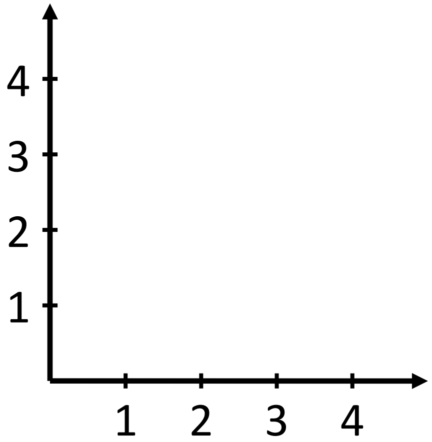
Übung Koordinatensysteme

Bestimmen Sie: $\mathbf{M_1} \times \mathbf{M_2}$

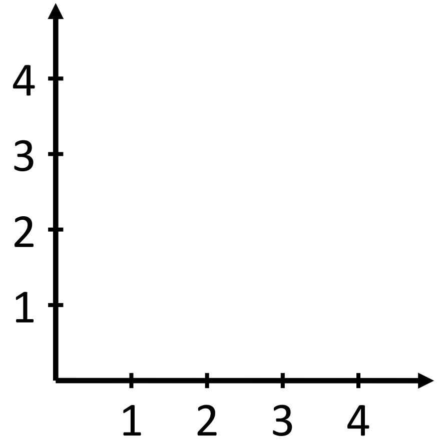
a) $\mathbf{M_1} = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad$ $\mathbf{M_2} = [1, 4]$

b) $\mathbf{M_1} = [1, 4]$ $\quad$ $\mathbf{M_2} = \{1, 2, 3, 4\}$

a)



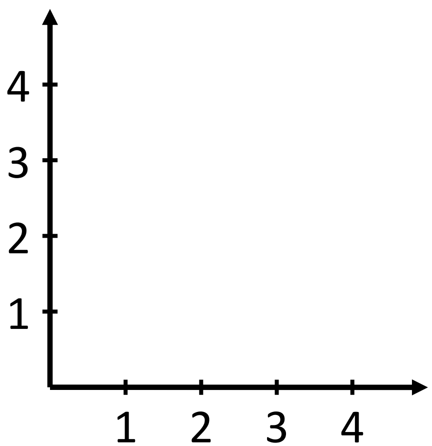
b)



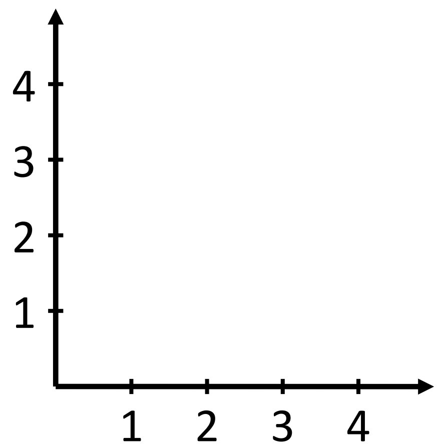
c) $\mathbf{M_1} = [1, 4]$ $\quad$ $\mathbf{M_2} = [1, 4]$

d) $\mathbf{M_1} = \mathbb{R}_0^+$ $\quad$ $\mathbf{M_2} = \mathbb{R}_0^+$

c)



d)



Übung Koordinatensysteme

Bestimmen Sie: $\mathbf{M_1} \times \mathbf{M_2}$

a) $\mathbf{M_1} = \{1, 2, 3, 4\}$ $\mathbf{M_2} = [1, 4]$

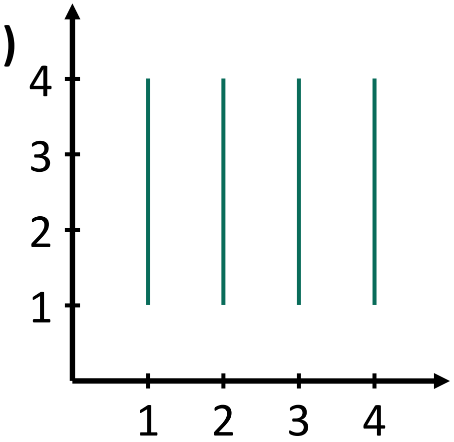
b) $\mathbf{M_1} = [1, 4]$ $\mathbf{M_2} = \{1, 2, 3, 4\}$

c) $\mathbf{M_1} = [1, 4]$ $\mathbf{M_2} = [1, 4]$

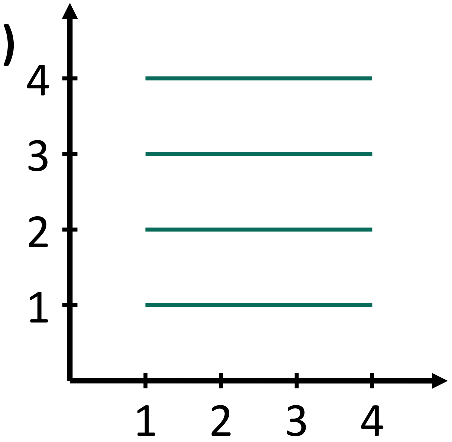
d) $\mathbf{M_1} = \mathbb{R}_0^+$ $\mathbf{M_2} = \mathbb{R}_0^+$

Lösung

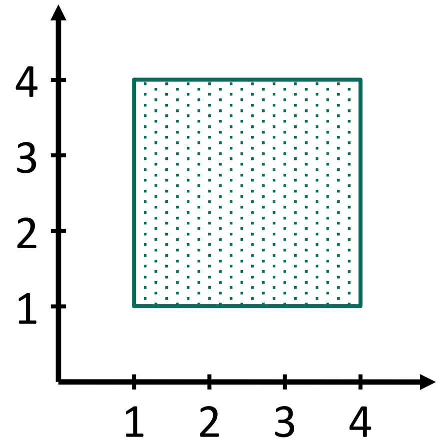
a)



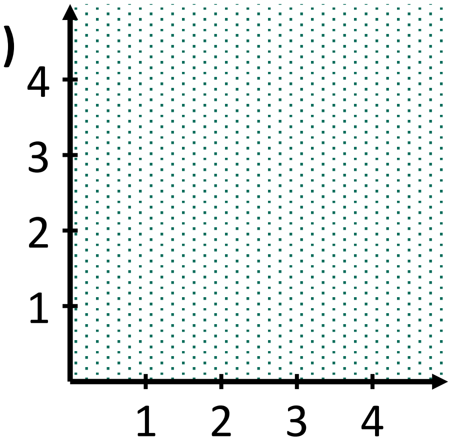
b)



c)



d)



Die komplette Fläche zwischen der x- und der y-Achse.

Prüfungsvorbereitung

**Die folgenden Fragen dienen nur der Selbsteinschätzung.
Sie sind keine Auflistung der Klausurfragen.**

Prüfungsvorbereitung

Nach der Lerneinheit sollten Sie folgende Fragen beantworten können:

Wie heißen die griechischen Buchstaben und wie sehen sie in Groß- und Kleinschrift aus?

Wofür werden welche lateinischen Buchstaben in der Regel verwendet?

Was ist der Unterschied zwischen einer Variable, einem Parameter und einer Konstante?

Wie lauten folgende Rechengesetze: Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz?

Wie lauten die wichtigsten Vorzeichenkonventionen?

Wie lauten die wichtigsten logischen Symbole, die in der Mathematik verwendet werden?

Prüfungsvorbereitung

Nach der Lerneinheit sollten Sie folgende Fragen beantworten können:

Was versteht man unter dem Begriff Menge und welche Zeichen stehen für Mengen?

Was sind Elemente einer Menge und wie werden sie gekennzeichnet?

Was ist die leere Menge und was ist der Unterscheid zur Null?

Wann sind Mengen gleich und wann disjunkt (elementfremd)?

Was ist der Unterschied zwischen einer Teilmenge und einer echten Teilmenge?

Wie sind der Durchschnitt, die Vereinigung und die Differenz von Mengen definiert?

Was sind Tupel und was ist der wichtigste Unterscheid zu Mengen?

Was ist ein Mengenprodukt und wozu kann man es verwenden?

Ist die Reihenfolge der Mengen beim Mengenprodukt relevant?

Prüfungsvorbereitung

Nach der Lerneinheit sollten Sie folgende Fragen beantworten können:

Welche Zahlenmengen kennen Sie und wofür werden sie jeweils angewendet?

Wie verhalten sich die Zahlenmengen zueinander?

Was ist das Besondere an der Zahl Null?

Wofür steht der Begriff unendlich?

Was bedeutet es, wenn ein Term nicht definiert ist? Welche Beispiele kennen Sie?

Welche Zahlenoperationen (Rechenarten) kennen Sie?

Welche Operationen kann man in welchen Zahlenmengen unbeschränkt durchführen?

Wie lauten die Regeln für die Bruchrechnung? (bitte auswendig können!)

Wie lauten die Potenzgesetze und die Logarithmengesetze? (bitte auswendig können!)

Wie was sind und wie löst man Gleichungen und Ungleichungen? (brauchen Sie sehr häufig)

Prüfungsvorbereitung

Nach der Lerneinheit sollten Sie folgende Fragen beantworten können:

Was versteht man unter einem b-adischen Stellenwertsystem?

Wie lautet die allgemeine Darstellung?

Welche Basen für werden in diesem Stellenwertsystem häufig verwendet?

Welche Namen haben die Potenzen der langen Skala? Wie lauten die SI-Präfixe dazu?

Wie kann man von Dual- ist Dezimalsystem und umgekehrt umrechnen?

Was ist eine hochzusammengesetzte Zahl?

Weshalb kann man Systemen mit der Basis 12 und 60 besser rechnen als mit der Basis 10?

Prüfungsvorbereitung

Nach der Lerneinheit sollten Sie folgende Fragen beantworten können:

Für welche Zahlenmenge ist der Begriff Intervall definiert?

Wie sind die Begriffe offene, halboffene, geschlossene und uneigentliche Intervalle definiert?

Was versteht man unter einem Extremwert eines Intervalls?

Für welche Intervalle sind Extremwerte definiert und für welche nicht?

Was versteht man unter einem kartesischen Koordinatensystem? Wie wird es definiert?

Was versteht man unter einem polaren Koordinatensystem?

Wo liegen der I., II., III. und VI. Quadrant?

Wie können kartesische Koordinaten in Polarkoordinaten umgerechnet werden?

Wie können Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten umgerechnet werden?